

1 Άσκηση νευρωνικού δικτύου

Έστω ένα νευρωνικό δίκτυο με μια είσοδο x , ένα νευρώνα και μια έξοδο y . Η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η σιγμοειδής:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (1)$$

Η έξοδος του νευρώνα είναι:

$$y = \sigma(wx + b) \quad (2)$$

όπου w είναι το βάρος και b η πόλωση. Δίνονται τα δεδομένα εκπαίδευσης του δικτύου:

x	y
1	1
0	0

Να βρεθούν οι τιμές των w και b που να ελαχιστοποιούν το τετραγωνικό σφάλμα:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3)$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε την έξοδο του δικτύου για κάθε δεδομένο εκπαίδευσης:

- Για $x=1$: $\hat{y}_1 = \sigma(w + b)$
- Για $x=0$: $\hat{y}_2 = \sigma(b)$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το τετραγωνικό σφάλμα:

$$E = \frac{1}{2} [1 - \sigma(w + b)]^2 + (0 - \sigma(b))^2 \quad (4)$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα πέρνουμε τις μερικές παραγώγους του E προς w και b και τις θέτουμε ίσες με μηδέν.

$$\frac{\partial E}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad (5)$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού δίνει τις τιμές w, b που ελαχιστοποιούν το σφάλμα.