# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

## Περιεχόμενα



# 1 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

## 1.1 Άσκηση

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου $\nu$, να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = \sum_{k=0}^{\nu} i^k = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^k$$

## Λύση

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος $\nu$ και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $i$ και λόγο $i$. Επομένως, $S = i\frac{i^\nu - 1}{i-1}$ Κάνοντας Ευκλείδεια Διαίρεση του $\nu$ με το 4 έχουμε $\nu = 4\rho + \upsilon$ ,όπου $\rho \in Z$ και $\upsilon = 1, 2, 3, 4$. Εφόσον

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = \begin{cases} i & ,\text{αν } \upsilon = 1 \\ -1 & ,\text{αν } \upsilon = 2 \\ -i & ,\text{αν } \upsilon = 3 \\ 1 & ,\text{αν } \upsilon = 4 \end{cases}$$

έχουμε ότι

$$S = \begin{cases} 0 & ,\text{αν } \upsilon = 1 \\ i & ,\text{αν } \upsilon = 2 \\ -1 + i & ,\text{αν } \upsilon = 3 \\ -1 & ,\text{αν } \upsilon = 4 \end{cases}$$

## 1.2 Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών $z$ όταν ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός αριθμός.

## Λύση

Αν $z = x + iy$ τότε:

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-2i} &= \frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i} \\ &= \frac{(x^2-x+y^2-2y)+i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2} \\ &= \frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}\end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός $\Leftrightarrow \frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$ και $(x,y) \neq (0,2)$. Άρα, το σύνολο των εικόνων του $z$ είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K = (\frac{1}{2}, 1)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$ με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$

## 1.3 Άσκηση

Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^n + i^{-n}$ ·

## Λύση

σολ

## 1.4 Άσκηση

Να βρεθούν οι αριθμοί $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει:

1. $(x+y)+(x-y)i = 3-i$
2. $\sqrt{3x^2+x-6}+(x^2-3)i = 2+i$
3. $9-27i = (3x+2y)-yi$

## Λύση

σολ

## 1.5 Άσκηση

Να περιγράψετε γεωμετρικά τα σύνολα:

- $Re(z) = 0$
- $Im(z) = 0$
- $Re(z) = Im(z)$
- $|z+i-3) \geq 5$

## Λύση

ς
ο

## 1.6 Άσκηση

Να δείξετε ότι $(\alpha + bi)^{10} + (b - \alpha i)^{10} = 0$ .

## Λύση

Θα εφαρμόσουμε τις γνώστές ταυτότητες και θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού.

## 1.7 Άσκηση *

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z$. Να δείξετε ότι:

- $z \in R \Leftrightarrow z = z$
- $z \in C - R \Leftrightarrow z = -z$

## Λύση

σολ