

Ψηφιοποιημένες Ασκήσεις Μαθηματικών

Πάυλος Μαργαρίτης

13 Απριλίου 2025

Περιεχόμενα

1	Άσκηση 1	3
2	Άσκηση 2	3
3	Άσκηση 3	4
4	Άσκηση 4	4
5	Άσκηση 5	5

1 Άσκηση

Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| < 1 \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει ότι $z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} : z_k \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι $z_k - i, z_k + i \in \mathbb{C}$ και μάλιστα $\overline{z_k - i} = z_k + i$. Επομένως, $\left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| = 1$. Τότε όμως θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| \geq 1$$

που είναι άτοπο.

□

2 Άσκηση

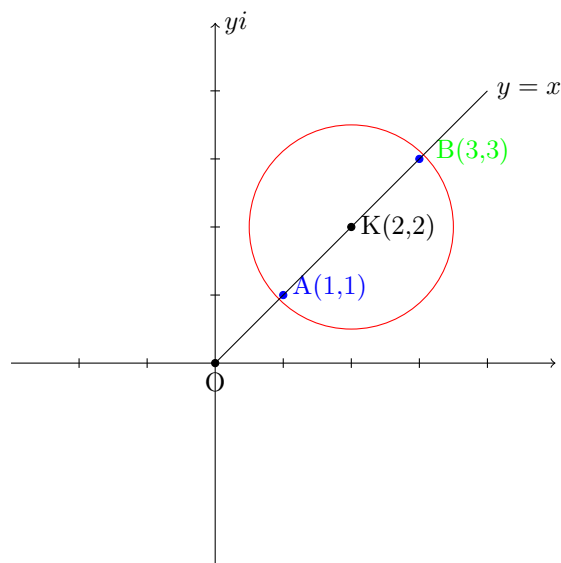
Έστω $z \in \mathbb{C} : |z - (2 + 2i)| = \sqrt{2}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση

Έστω $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} |z - (2 + 2i)| &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ |(x - 2) + i(y - 2)| &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 2 \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος κέντρου $K(2, 2)$ και ακτίνας $\sqrt{2}$.



□

3 Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$$

.

Λύση

Έστω $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι

$$\frac{z-1}{z+1} = \underbrace{\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}}_A + \underbrace{\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}}_B i$$

Πρέπει

$$\begin{cases} \frac{B}{A} = \tan \frac{\pi}{6} \\ B > 0 \end{cases}$$

□

4 Άσκηση

Αν $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, να αποδείξετε ότι:

- $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$
- $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \dots \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$

Λύση

$$\text{Έχουμε } 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0$$

$$\text{Έχουμε } 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \dots \omega^{n-1} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = \dots = (-1)^{n-1}$$

□

5 Άσκηση

Έστω $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z + 1$.

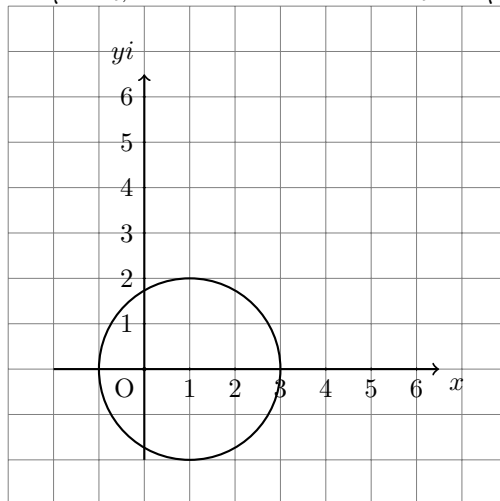
Λύση

Αρκεί να περιγράψουμε γεωμετρικά το σύνολο

$$A = \{2z + 1 : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

$$\text{Είναι } z = \frac{w-1}{2}, \text{ οπότε } |z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{w-1}{2} \right| = 1 \Leftrightarrow |w-1| = 2$$

Επομένως, το σύνολο A είναι κύκλος κέντρου $K(0,1)$ και ακτίνας $R = 2$, δηλαδή



□