

Επιχειρησιακή Έρευνα: Η συμβολή των μαθηματικών στον γραμμικό προγραμματισμό και οι σύγχρονες εφαρμογές του

Πάυλος Μαργαρίτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

4 Μαΐου 2025

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1 Εισαγωγή
- 2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση και εφαρμογές
 - Βιβλιογραφική ανασκόπηση
 - Εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού
 - Μοντελοποίηση
 - Θεωρητικό παράδειγμα εφαρμογής
- 3 Συμπεράσματα
- 4 Αναφορές

Επιχειρησιακή Έρευνα

- επιστημονικός κλάδος
- ανάπτυξη και εφαρμογή επιστημονικών μεθοδολογιών και τεχνικών
- στόχος: επίλυση προβλημάτων λήψης αποφάσεων, συνήθως υπό συνθήκες που απαιτούν την κατανομή σπάνιων παραγωγικών πόρων.

Μαθηματικός Προγραμματισμός

- σύνολο μαθηματικών μεθόδων και υπολογιστικών τεχνικών (αλγορίθμων)
- χρήση: επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης [2]

Πρόβλημα βελτιστοποίησης

Περιγράφεται μέσω ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο αποτελείται από:

- μια πραγματική συνάρτηση της οποίας ζητείται το μέγιστο (ή το ελάχιστο)
- μια ομάδα συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται από τις μεταβλητές της συνάρτησης.

Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

Όταν η συνάρτηση αυτή και οι απαιτούμενες συνθήκες εκφράζονται από γραμμικές σχέσεις, τότε κάνουμε λόγο για πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Βιβλιογραφική ανασκόπηση και εφαρμογές I

Βιβλιογραφική ανασκόπηση

- 1840: Ο Charles Babbage(1791-1871) μελέτησε το κόστος μεταφοράς και ταξινόμησης της αλληλογραφίας.
- 1917: Ο Anger Krarup Erlang(1878-1929) μελέτησε προβλήματα που αφορούν τον χρόνο απασχόλησης των τηλεφωνικών κέντρων
- 1920: Ο Horace Clifford Levinson ασχολήθηκε με προβλήματα πωλήσεων και εμπορίου.
- Β΄ Παγκόσμιος Πόλεμος: καθοριστικός ρόλος της Επιχειρησιακής Έρευνας στον στρατηγικό σχεδιασμό, τον εφοδιασμό και την κατανομή των πόρων [3]
- 1950 και 1960: αναπτύχθηκαν θεμελιώδεις αλγόριθμοι και μεθοδολογίες (μέθοδος του Simplex [1])

Βιβλιογραφική ανασκόπηση και εφαρμογές I

Εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού [8]

- **ενέργεια:** βελτιστοποίηση διανομής ενέργειας, σχεδιασμός ενεργειακών δικτύων [10]
- **γεωργία:** βελτιστοποίηση χρήσης γης και καλλιεργειών [8]
- **διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας και μεταφορές:** βελτιστοποίηση δρομολογίων, διαχείριση αποθεμάτων, χωροθέτηση εγκαταστάσεων. [1]
- **οικονομικά συστήματα:** βελτιστοποίηση επενδύσεων, πιστωτικές πολιτικές [4]
- **συστήματα υγείας:** κατανομή ιατρικού προσωπικού και πόρων [6]

Διατύπωση γενικού προβλήματος γραμικού προγραμματισμού - μοντελοποίηση [2] I

Να μεγιστοποιηθεί (ή να ελαχιστοποιηθεί) η συνάρτηση

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n & \{ \leq, =, \geq \} & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n & \{ \leq, =, \geq \} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots + & a_{mn}x_n & \{ \leq, =, \geq \} & b_m \end{array}$$

Υποθέσεις

- Τα a_{ij} , b_i , c_j είναι πραγματικές σταθερές.
- μπορεί να ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις $\leq, =, \geq$
- συνθήκη μη αρνητικότητας: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Ορολογία

- Z : αντικειμενική συνάρτηση
- c_j : συντελεστές κέρδους (ή κόστους για προβλήματα μεγιστοποίησης)
- $x_1, x_2, \dots, x_n$: συντελεστές αποφάσεων.
- Η περιοχή στην οποία ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί: εφικτή περιοχή.

Θεωρητικό παράδειγμα εφαρμογής [9]

Μια εταιρία παράγει δύο προϊόντα A και B. Η εταιρία έχει δύο εργοστάσια ηλεκτρικών μηχανημάτων τα οποία από κοινού κατασκευάζουν τα δύο προϊόντα στις ποσότητες ανά ώρα που φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Εργοστάσιο 1	Εργοστάσιο 2
Προϊόν A	10	20
Προϊόν B	25	25

Η εταιρία λαμβάνει μια παραγγελία για 300 τεμάχια του προϊόντος A και 500 τεμάχια του προϊόντος B. Η δαπάνη λειτουργίας του Εργοστασίου 1 είναι 10.000 ευρώ ανά ώρα, ενώ του Εργοστασίου B είναι 8.000 ευρώ ανά ώρα.

- Να σχηματιστεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους της παραγγελίας
- Να βρεθεί το σημείο όπου ελαχιστοποιείται το κόστος, καθώς και το ελάχιστο κόστος

Ορισμός μεταβλητών - Συνθήκες:

- x_1, x_2 είναι ο αριθμός των ωρών κατά τις οποίες λειτουργούν τα δύο εργοστάσια για την ικανοποίηση της παραγγελίας.
- $z = 10.000x_1 + 8.000x_2$ είναι το συνολικό κόστος λειτουργίας των δύο εργοστασίων
- σε μία ώρα παράγονται
 - $10x_1 + 20x_2$ τεμάχια του προϊόντος A
 - $25x_1 + 25x_2$ τεμάχια του προϊόντος B
- Ζητούνται 300 τεμάχια του A, άρα πρέπει $10x_1 + 20x_2 \geq 300$
- Ζητούνται 500 τεμάχια του B, άρα πρέπει $25x_1 + 25x_2 \geq 500$.
- Ισχύουν επίσης $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$.

Λύση II

Μαθηματική μοντελοποίηση:

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση

$$z = 10.000x_1 + 8.000x_2$$

υπό τους περιορισμούς

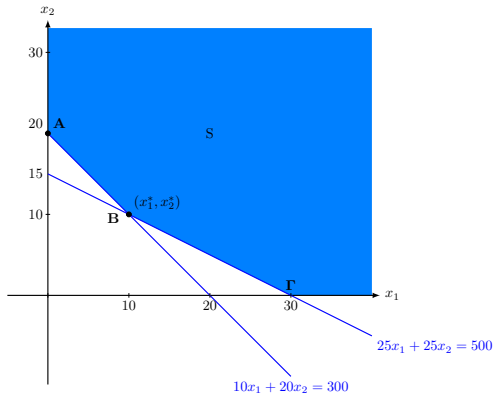
$$10x_1 + 20x_2 \geq 300$$

$$25x_1 + 25x_2 \geq 500$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Γραφική αναπαράσταση



Σχήμα: Αναπαράσταση της εφικτής περιοχής

Για την εύρεση της λύσης χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα

Theorem

Αν υπάρχει το καλύτερο διατεταγμένο ζεύγος (x_1, x_2) , δηλαδή το ζεύγος εκείνο που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση, τότε οι τιμές x_1 και x_2 θα είναι οι συντεταγμένες (x_1, x_2) ενός (ή περισσοτέρων) σημείου από τις κορυφές της εφικτής περιοχής.

Συνεπώς, προσδιορίζουμε τα σημεία A,B,Γ, λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα εξισώσεων. Με αντικατάσταση των σημείων A(0,20), B(10,10) , Γ(30,0) στην συνάρτηση z , έχουμε:

Για το A(0,20) $z = 10.000 \cdot 0 + 8.000 \cdot 20 = 160.000$

Για το B(10,10) $z = 10.000 \cdot 10 + 8.000 \cdot 20 = 180.000$

Για το Γ(30,0) $z = 10.000 \cdot 0 + 8.000 \cdot 30 = 300.000$

Συμπεράσματα:

Το σημείο A(0,20) ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση z . Δηλαδή το ελάχιστο κόστος είναι 160.000 ευρώ και επιτυγχάνεται όταν το Εργοστάσιο 1 δεν λειτουργεί καθόλου, ενώ το Εργοστάσιο 2 λειτουργεί συνολικά για 20 ώρες.

Συμπεράσματα I

- Τα μαθηματικά παίζουν ουσιαστικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού και γενικότερα στην επιχειρησιακή έρευνα, παρέχοντας ένα ισχυρό και αναλυτικό πλαίσιο για την ανάλυση και την μοντελοποίηση.
- Η ευρεία εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού σε πολλούς τομείς, καταδεικνύει την τεράστια αξία και την αναγκαιότητα του.
- Η συνεχής ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών και υπολογιστικών εργαλίων θα επηρεάσει καταλυτικά την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων του μέλλοντος.

Αναφορές I



Hillier, Frederick and Lieberman, Gerald .

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα.

Τζιόλα, 2017.



Δημήτρης Φακίνος και Αντώνης Οικονόμου.

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα.

Εκδόσεις Παπαζήση, 2022.



Ιωάννης Κολέτσος και Δημήτρης Στογιάννης.

Επιχειρησιακή Έρευνα.

Συμεών, 2021.

Αναφορές II



Κωνσταντίνος Κουνέτας.

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα και στον Γραμμικό Προγραμματισμό. Λύσεις προβλημάτων με το πρόγραμμα textlatinR.

Κάλλιπος, 2016.



Δημήτριος Μάγος.

Στοιχεία γραμμικού και ακέραιου προγραμματισμού.

Κάλλιπος, 2023.



Κωνσταντίνος Παπαρίζος.

Γραμμικός Προγραμματισμός Αλγόριθμοι και Εφαρμογές.

Ζυγός, 1999.

Αναφορές III



Ιωάννης Ρασσιάς.

*Γραμμική Αλγεβρα - Γραμμικός Προγραμματισμός.
Συμμετρία, 2003.*



Παντελής Υψηλάντης.

*Επιχειρησιακή Έρευνα.
Προπομπός, 2007.*



Φράγκος, Χρήστος Κ.

*Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα.
Σταμούλη Α.Ε., 2006.*



Κωνσταντίνος Κουνέτας και Νικόλαος Χατζησταμούλου.

*Εφαρμοσμένη επιχειρησιακή έρευνα και γραμμικός
προγραμματισμός.
Κριτική, 2020.*