

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πάυλος Μαργαρίτης

Περιεχόμενα

1	ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	2
1.1	Άσκηση 1	2
1.2	Άσκηση 2	2
1.3	Άσκηση 3	3
1.4	Άσκηση 4	3
1.5	Άσκηση 5	4
1.6	Άσκηση 6	4
1.7	Άσκηση 7	5

1 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Άσκηση

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου ν , να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = \sum_{k=0}^{\nu} i^k = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{\nu}$$

Λύση

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος ν και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο i και λόγο i . Επομένως,

$$S = i \frac{i^{\nu} - 1}{i - 1}$$

Κάνοντας Ευκλείδεια Διαίρεση του ν με το 4 έχουμε $\nu = 4\rho + v$, όπου $\rho \in \mathbb{Z}$ και $v = 1, 2, 3, 4$. Εφόσον

$$i^{\nu} = i^{4\rho+v} = \begin{cases} i & , \text{αν } v = 1 \\ -1 & , \text{αν } v = 2 \\ -i & , \text{αν } v = 3 \\ 1 & , \text{αν } v = 4 \end{cases}$$

έχουμε ότι

$$S = \begin{cases} 0 & , \text{αν } v = 1 \\ i & , \text{αν } v = 2 \\ -1 + i & , \text{αν } v = 3 \\ -1 & , \text{αν } v = 4 \end{cases}$$

1.2 Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z όταν ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός αριθμός.

Λύση

Αν $z = x + iy$ τότε:

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z-2i} &= \frac{(x-1) + yi}{x + (y-2)i} \\ &= \frac{(x^2 - x + y^2 - 2y) + i(2x + y - 2)}{x^2 + (y-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{2x + y - 2}{x^2 + (y-2)^2}i\end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{και } (x, y) \neq (0, 2)\end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K(\frac{1}{2}, 1)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$ με εξαίρεση το σημείο $A(0, 2)$

1.3 Άσκηση

Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^n + i^{-n}$.

Λύση

1.4 Άσκηση

Να βρεθούν οι αριθμοί $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει:

1. $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$
2. $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$
3. $9 - 27i = (3x + 2y) - yi$

Λύση

1.5 Άσκηση

Να περιγράψετε γεωμετρικά τα σύνολα:

- $Re(z) = 0$
- $Im(z) = 0$
- $Re(z) = Im(z)$
- $|z + i - 3| \geq 5$

Λύση

1.6 Άσκηση

Να δείξετε ότι $(\alpha + bi)^{10} + (b - \alpha i)^{10} = 0$.

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τις γνώστες ταυτότητες και θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού.

1.7 Άσκηση

Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z . Να δείξετε ότι:

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Λύση