

Επίλυση Μαθηματικών Ασκήσεων

Μαρία Ξανθίππη Ψαροπά
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

June 13, 2025

Contents

1	Άσκηση 1	1
2	Άσκηση 2	2
3	Άσκηση 3	3
4	Άσκηση 4	4
5	Άσκηση 5	5

1 Άσκηση 1

Εκφώνηση: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y' = \frac{1}{2e^y - x}$

Λύση:

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση δεν είναι γραμμική. Εναλλάσσοντας όμως, το ρόλο των μεταβλητών και θεωρώντας το x ως συνάρτηση του y , προκύπτει ότι:

$$\frac{dx}{dy} + x = 2e^y, \quad (1)$$

η οποία είναι γραμμική εξίσωση ως προς το $x(y)$. Έτσι, από την (1) έχουμε

$$\frac{d}{dx}(xe^y) = 2e^{2y},$$

οπότε

$$xe^y = e^{2y} + C,$$

ή

$$x = e^y + Ce^{-y}, \quad (2)$$

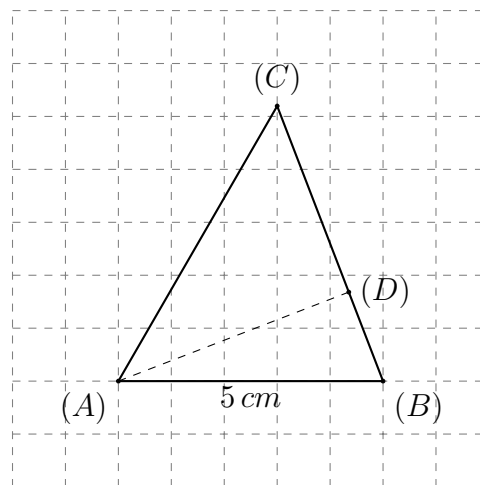
όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Η σχέση (2) δίνει τη γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή.

2 Άσκηση 2

Εκφώνηση: Δίνεται τρίγωνο ABC με πλευρές $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, και γωνία $\angle BAC = 60^\circ$.

Να σχεδιάσετε το τρίγωνο και να φέρετε το ύψος από το σημείο A στην πλευρά BC . Να υπολογιστεί το μήκος του ύψους.

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι:

$$h = AC \cdot \sin(\angle BAC) = 6 \cdot \sin(60^\circ) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5.20\text{ cm}$$

Άρα, το ύψος από το A στην πλευρά BC είναι περίπου 5.20 cm

3 Άσκηση 3

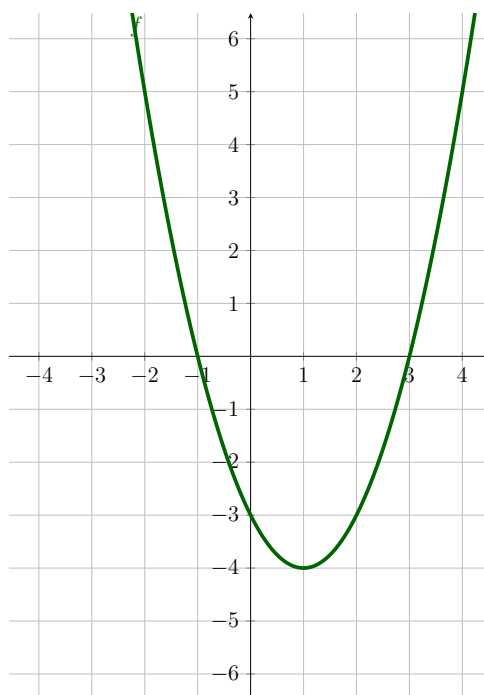
Εκφώνηση: Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$ και να προσδιοριστούν οι ρίζες, το ελάχιστο και το σημείο τομής με τον άξονα y .

Λύση:

Έχουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad (3)$$

με γραφική παράσταση:



Οι ρίζες της συνάρτησης (3) είναι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

όπου $a = 1, b = -2, c = -3$. Υπολογίζουμε:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Άρα:

- $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$
- $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

Οι ρίζες της συνάρτησης είναι:

$$x = -1 \text{ και } x = 3$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με φορά προς τα **πάνω**, αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός.

Η x-συντεταγμένη της κορυφής του ελαχίστου δίνεται από τον τύπο:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Αντικαθιστούμε στην $f(x)$ για να βρούμε το ελάχιστο:

$$f(1) = (1)^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Άρα το ελάχιστο της συνάρτησης είναι στο σημείο $(1, -4)$

Η τομή με τον άξονα y γίνεται όταν $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Άρα η συνάρτηση τέμνει τον άξονα y στο σημείο: $(0, -3)$

4 Άσκηση 4

Εκφώνηση: Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ υπολογίστε τον πίνακα A^n .

Λύση:

$$\text{Έχουμε } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I_2 \cdot A = -A,$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-I_2) \cdot (-I_2) = I_2$$

Άρα:

$$A^n = \begin{cases} I_2, & n = 4k \\ A, & n = 4k + 1, \\ -I_2, & n = 4k + 2, \\ -A, & n = 4k + 3 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

5 Άσκηση 5

Εκφώνηση: Αν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ δείξτε ότι και τα $\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}, 2\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}, 3\vec{u} + \vec{w}$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Λύση:

Έστω $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$k \cdot (\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}) + \lambda \cdot (2\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}) + \mu \cdot (3\vec{u} + \vec{w}) = \vec{0}.$$

Τότε

$$(k + 5\lambda + 3\mu) \cdot \vec{u} + (2k + 2\lambda) \cdot \vec{v} + (4k + \lambda + \mu) \cdot \vec{w} = \vec{0}.$$

Επειδή τα u, v, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εξ ορισμού το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} k + 5\lambda + 3\mu = 0 \\ 2k + 2\lambda = 0 \\ 4k + \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

πρέπει να έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Το σύστημα αυτό είναι ομογενές 3×3 σύστημα. Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων ικανοποιεί την

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26 \neq 0$$

συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική $k = \lambda = \mu = 0$. Άρα τα $\vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}, 2\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}, 3\vec{u} + \vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.