

Μέγιστες ροές και Ταιριάσματα: Εξερεύνηση της συσχέτισης μεταξύ τους.

Μαρία Ξανθίπη Ψαροπά

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

13th June 2025

Περιεχόμενα

- 1 Εισαγωγή
 - Χρήσιμοι ορισμοί
- 2 Πρόβλημα υπό εξέταση
 - Θεωρητική κατεύθυνση
 - Πρακτική κατεύθυνση
 - Πρόβλημα
 - Οπτικοποίηση

Εισαγωγή

- Στην επιστήμη της πληροφορικής, οι **μέγιστες ροές** και τα **ταιριάσματα** είναι δύο βασικά προβλήματα της Θεωρίας Γραφημάτων με πολλές θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές.

Εισαγωγή

- Στην επιστήμη της πληροφορικής, οι **μέγιστες ροές** και τα **ταιριάσματα** είναι δύο βασικά προβλήματα της Θεωρίας Γραφημάτων με πολλές θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές.
- Αν και εκ πρώτης όψεως φαίνονται διαφορετικά προβλήματα, υπάρχει μια θεμελιώδης συσχέτιση μεταξύ τους η οποία θα αναλυθεί σε αυτή την παρουσίαση.

Τι είναι οι Μέγιστες Ροές και τι τα Ταιριάσματα;

Ορισμός - Μέγιστες Ροές

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής αφορά ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου κάθε ακμή έχει μία χωρητικότητα. Σε αυτή, θέλουμε να υπολογίσουμε την μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από μία πηγή (source) προς ένα τερματισμό (sink) χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί χωρητικότητας.

Τι είναι οι Μέγιστες Ροές και τι τα Ταιριάσματα;

Ορισμός - Μέγιστες Ροές

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής αφορά ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου κάθε ακμή έχει μία χωρητικότητα. Σε αυτή, θέλουμε να υπολογίσουμε την μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από μία πηγή (source) προς ένα τερματισμό (sink) χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί χωρητικότητας.

Ορισμός - Ταίριασμα

Σε ένα γράφημα $G = (V, E)$, το ταίριασμα M είναι ένα υποσύνολο όλων των ακμών έτσι ώστε καμία κορυφή $u \in V$ να μην χρησιμοποιείται από περισσότερες από μια ακμές του M .

Επιπλέον χρήσιμες έννοιες

Ορισμοί

- **Μέγεθος Ταιριάσματος:** Ο αριθμός των ακμών που περιέχει το ταίριασμα: $|M|$.

Επιπλέον χρήσιμες έννοιες

Ορισμοί

- **Μέγεθος Ταιριάσματος:** Ο αριθμός των ακμών που περιέχει το ταίριασμα: $|M|$.
- **Μέγιστο Ταίριασμα:** Αυτό του οποίου το μέγεθος $|M|$ είναι το μέγιστο.

Επιπλέον χρήσιμες έννοιες

Ορισμοί

- **Μέγεθος Ταιριάσματος:** Ο αριθμός των ακμών που περιέχει το ταίριασμα: $|M|$.
- **Μέγιστο Ταίριασμα:** Αυτό του οποίου το μέγεθος $|M|$ είναι το μέγιστο.
- **Μέγεθος Ταιριάσματος:** Ο αριθμός των ακμών που περιέχει το ταίριασμα: $|M|$.

Επιπλέον χρήσιμες έννοιες

Ορισμοί

- **Μέγεθος Ταιριάσματος:** Ο αριθμός των ακμών που περιέχει το ταίριασμα: $|M|$.
- **Μέγιστο Ταίριασμα:** Αυτό του οποίου το μέγεθος $|M|$ είναι το μέγιστο.
- **Μέγεθος Ταιριάσματος:** Ο αριθμός των ακμών που περιέχει το ταίριασμα: $|M|$.
- **Διμερές Γράφημα:** Γράφημα $G = (A, B, E)$ στο οποίο το σύνολο των κορυφών u χωρίζεται σε 2 ξεχωριστά σύνολα A και B και όλες οι ακμές E συνδέουν κορυφή του A με κορυφές του B μόνο.

Πώς σχετίζονται οι έννοιες μέσω θεωρίας;

Οι έννοιες της μέγιστης ροής και του ταιριάσματος συμπίπτουν και έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη τους, όταν εξετάζουμε διμερή γραφήματα (bipartite graphs). Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ένα θεώρημα που αναδεικνύει την συσχέτισή τους.

Πώς σχετίζονται οι έννοιες μέσω θεωρίας;

Οι έννοιες της μέγιστης ροής και του ταιριάσματος συμπίπτουν και έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη τους, όταν εξετάζουμε διμερή γραφήματα (bipartite graphs). Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ένα θεώρημα που αναδεικνύει την συσχέτισή τους.

Θεώρημα

Κάθε πρόβλημα μέγιστου ταιριάσματος σε διμερές γράφημα μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο πρόβλημα μέγιστης ροής σε κατευθυνόμενο γράφημα, έτσι ώστε το μέγεθος της μέγιστης ροής να ισούται με το μέγεθος του μέγιστου ταιριάσματος.

Πρακτικό παράδειγμα

Τώρα θα μελετήσουμε την αντιστοίχιση μεταξύ του δικτύου N και του πλήρους διμερούς γραφήματος $K_{3,3}$ μέσω του παρακάτω πίνακα:

Πρακτικό παράδειγμα

Τώρα θα μελετήσουμε την αντιστοίχιση μεταξύ του δικτύου N και του πλήρους διμερούς γραφήματος $K_{3,3}$ μέσω του παρακάτω πίνακα:

Διμερές γράφημα $K_{3,3}$	Δίκτυο ροής $N=(H,c,s,t)$	Σχόλιο
Κορυφές $A = \{a_1, a_2, a_3\}$	$a_i \in V_H$	Μία πλευρά του διμερούς γραφήματος
Κορυφές $B = \{b_1, b_2, b_3\}$	$b_j \in V_H$	Η άλλη πλευρά του διμερούς γραφήματος
Ακμές $(a_i, b_j) \in E$	$(a_i, b_j) \in E_H$	Υποψήφιες ακμές ταιριάσματος
—	s και t	Πηγή και προορισμός
—	(s, a_i)	Ροή από πηγή προς A
—	(b_j, t)	Ροή από B προς προορισμό
Δεν ορίζεται χωρητικότητα	$c(e) = 1$	Μοντελοποιεί μοναδικότητα ταιριάσματος
Μέγιστο ταιρίασμα	Μέγιστη ροή από s προς t	Κάθε μονάδα ροής = 1 αντιστοίχιση

Οπτικοποίηση $K_{3,3}$ σε δίκτυο ροής

Αφού αναλύσαμε την συσχέτιση των εννοιών μέσω συγκεκριμένου παραδείγματος, παρακάτω παραθέτεται και η οπτικοποίηση του διμερούς γραφήματος $K_{3,3}$ ως μέγιστο δίκτυο ροής για περαιτέρω κατανόηση της συσχέτισής τους.

