

Ασκηση 1:

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1} dx \quad (\beta) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad (\gamma) \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$$

Λύση

(α) Έχουμε $\frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1} = 3x^2 + 2x + \frac{1}{2x-1}$, οπότε θα είναι
$$\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1} dx = \int (3x^2 + 2x) dx + \int \frac{dx}{2x-1} = x^3 + x^2 + \ln |2x-1| + c,$$
$$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty).$$

(β)
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2 \cot 2x + c, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(γ)
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x+2}{3})^2}}$$

Αν θέσουμε $\frac{x+2}{3} = t$, τότε $x+2 = 3t$ και $dx = 3dt$,
οπότε έχουμε $I = \frac{1}{3} \int \frac{3dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin \left(\frac{x+2}{3}\right) + c$,
όπου $x \in J = \{x : |x+2| < 3\} = (-5, 1)$ νότε: οι ασκήσεις είναι από το αρχείο `paradeigmata_askiseon_mathjax.docx` που είναι ανεβασμένο στο spooky.

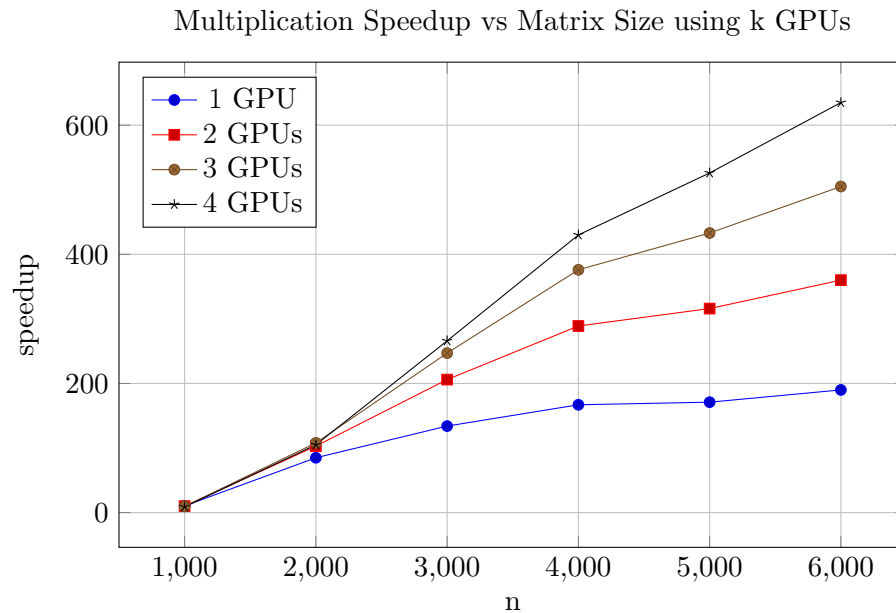
Ασκηση 2:

Να αποτυπωθεί ο ακόλουθος πίνακας σε γράφημα με χρήση tikz

Πίνακας 1: gpu speedup

σπεεδυπ	1	2	3	4
1000	10.39372325	10.10540915	9.574244415	8.858358663
2000	84.91593476	103.9600614	108.1694193	105.5819033
3000	134.1270928	206.6760481	247.3585965	266.2280967
4000	167.7174254	289.8229908	376.431623	430.2481752
5000	171.3004226	315.9734197	433.1362173	526.3092929
6000	190.1277774	360.6296115	505.1097613	635.0680865

Λύση



Ασκηση 3:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $AB=3$ και $AC=4$. Να βρεθούν η υποτείνουσα και το εμβαδόν του τριγώνου, καθώς και να σχεδιαστεί.

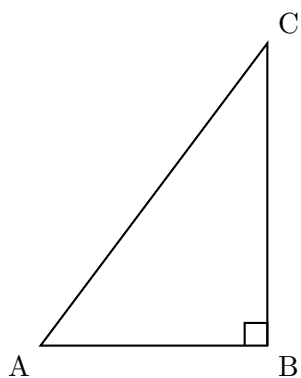
Λύση:

Γνωρίζουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ότι αν BC η υποτείνουσα, τότε ισχύει:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ άρα η υποτείνουσα του τριγώνου ABC είναι $BC = 5$. Για το εμβαδόν του τριγώνου τώρα γνωρίζουμε ότι ισχύει ο τύπος: $E = \frac{\text{βάση} \cdot \text{υψος}}{2}$.

Αρα έχουμε:

$$(ABC) = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$



Ασκηση 4:

Να βρεθεί που συγκλίνει η ακόλουθη σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Λύση:

Για την παραπάνω σειρά ισχύει ότι $a_k \geq 0$. Έχουμε:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)!}{k!} * \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1*2*3*\dots*k*(k+1)*k^k}{1*2*3*\dots*(k+1)^k*(k+1)} =$$

$$\left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}} \right)^k \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

άρα από Κριτήριο Λόγου η

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

συγκλίνει.

Ασκηση 5

Υπολογίστε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

Λύση

Γραφουμε την παράσταση ως εξής:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 - x^2}{x^2 * \sin^2 x}$$

Αναπτύσσουμε το $\sin(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

και επομένως

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots$$

Αρα:

$$\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + \dots$$

Οπότε η αρχική παράσταση γίνεται:

$$\frac{-\frac{x^4}{3} + \dots}{x^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots \right)} = \frac{-\frac{x^4}{3} + \dots}{x^4 + \dots}$$

Καθώς $x \rightarrow 0$, τα υψηλότερης τάξης μέλη τείνουν στο 0 και έτσι εν τέλει έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{3}$$