

Η συμβολή της Γραμμικής Άλγεβρας στην Επεξεργασία Εικόνας: Θεωρία και Εφαρμογές του Μετασχηματισμού SVD

Άγγελος Γρουνίδης
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
ma12732@uoi.gr

April 20, 2025

Περίληψη

6 Συμπεράσματα

3

Η παρούσα εργασία διερευνά τη συνεισφορά της Αποσύνθεσης Κατά Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition - SVD) στην επιστημονική περιοχή της ψηφιακής επεξεργασίας εικόνας. Εστιάζει στη μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου μέσω της γραμμικής άλγεβρας, αναλύοντας με αυστηρότητα τη λειτουργική αρχή της SVD και παραθέτοντας ένα θεωρητικό παράδειγμα εφαρμογής. Σκοπός της εργασίας είναι να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο η αφαίρεση και η συμπίεση πληροφορίας μπορούν να επιτευχθούν μέσω μορφολογικής ανάλυσης δεδομένων, προσφέροντας αποδοτικά και αναπαραγώγιμα αποτελέσματα σε σύγχρονες εφαρμογές.

1 Είσαγωγή

Η Αποσύνθεση Κατά Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition - SVD) συνιστά μία από τις θεμελιώδεις τεχνικές της γραμμικής άλγεβρας, με εκτεταμένες εφαρμογές σε πληθώρα επιστημονικών και τεχνολογικών πεδίων, και ιδιαίτερα στον τομέα της επεξεργασίας ψηφιακών εικόνων. Η SVD επιτρέπει την παραγοντοποίηση ενός πίνακα σε βασικά δομικά του στοιχεία, διευκολύνοντας έτσι την κατανόηση και εκμετάλλευση της εγγενούς πληροφορίας που αυτός περιέχει.

Περιεχόμενα

- 1 Είσαγωγή
- 2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση
- 3 Προτεινόμενη Μέθοδος
- 4 Θεωρητικό Παράδειγμα Εφαρμογής
- 5 Αποτελέσματα και Ανάλυση

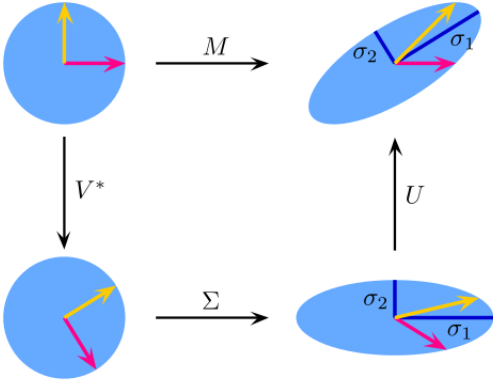
- Ειδικότερα, η SVD καθιστά δυνατή την προσέγγιση εικόνων μέσω της διατήρησης μόνο των σημαντικότερων συνιστωσών τους, οδηγώντας σε αποδοτική συμπίεση και αποθρομβοποίηση. Επιπλέον, διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο σε προβλήματα μειωμένης διαστασιμότητας, εξαγωγής χαρακτηριστικών και αναγνώρισης προτύπων. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην αυστηρή μαθηματική περιγραφή της μεθόδου και στην παρουσίαση ενός θεωρητικού παραδείγματος εφαρμογής, επιδιώκοντας να τεκμηριώσει τον ρόλο του SVD ως εργαλείου ανάλυσης και μετασχηματισμού δεδομένων υψηλής διαστασιμότητας.

2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Ο μετασχηματισμός SVD παρουσιάστηκε πλήρως από τους Eckart και Young (1936) και η υπολογιστική του θεμελίωση από τους Golub και Reinsch (1965) [3]. Ο Andrews (1976) [1] χρησιμοποίησε τον SVD για συμπίεση εικόνας. Σημαντική εφαρμογή εμφανίζεται στην αναγνώριση προσώπων με eigenfaces από τους Turk και Pentland (1991) [10]. Επιπλέον, η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε σε φίλτρα αποθορυβοποίησης (Elad και Aharon, 2006) [2] και επεκτάθηκε για μεγάλης κλίμακας πίνακες από τους Halko et al. (2011) [4].

3 Προτεινόμενη Μέθοδος

Ο SVD είναι ένας τρόπος παραγοντοποίησης ενός πραγματικού ή μιγαδικού πίνακα $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ως εξής:



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

όπου:

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ είναι ορθοκανονικός πίνακας,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία του τις ιδιάζουσες τιμές $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, του A
- $V^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο συζυγής ανάστροφος του V , ή απλά ο ανάστροφος του V αν ο V είναι πραγματικός είναι επίσης ορθοκανονικός πίνακας.

Η προσέγγιση 1ης τάξης με τον k -πρώτο όρο της διάσπασης $M_k = U_k \Sigma_k V_k^*$ παρέχει μία μορφή συμπίεσης με ελεγχόμενη απώλεια πληροφορίας, ιδανική για εφαρμογές σε εικόνες. Όπως φαίνεται στην εικόνα, οι ιδιάζουσες τιμές μπορούν να ερμηνευθούν ως οι ημιάξονες μιας έλλειψης στο επίπεδο. Αυτή η ιδέα μπορεί να γενικοποιηθεί στον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο, με τις ιδιάζουσες τιμές κάθε n η τετραγωνικού πίνακα να θεωρούνται ως οι ημιάξονες ενός n -διάστατου ελλειψοειδούς.

4 Θεωρητικό Παράδειγμα Εφαρμογής

Έστω πίνακας εικόνας μικρής διάστασης:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ο υπολογισμός του SVD δίνει:

$$U \approx \begin{bmatrix} -0.50 & 0.70 & 0.51 \\ -0.57 & -0.04 & -0.82 \\ -0.65 & -0.72 & 0.26 \end{bmatrix}, \quad \Sigma \approx \begin{bmatrix} 4.91 & 0 \\ 0 & 1.41 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$V^* \approx \begin{bmatrix} -0.57 & -0.82 \\ -0.82 & 0.57 \end{bmatrix}$ Κρατώντας μόνο την πρώτη ιδιάζουσα ($k = 1$), η προσέγγιση A_1 είναι:

$$M_1 = \sigma_1 u_1 v_1^* = 4.91 \cdot \begin{bmatrix} -0.50 \\ -0.57 \\ -0.65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.57 & -0.82 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } M_1 = \begin{bmatrix} 1.40 & 2.01 \\ 1.60 & 2.30 \\ 1.82 & 2.63 \end{bmatrix}$$

Η προσέγγιση δεύτερης τάξης χρησιμοποιεί και τις δύο ιδιάζουσες:

$$M_2 = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^*$$

Αν $\sigma_2 = 1.41$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0.70 \\ -0.04 \\ -0.72 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -0.82 \\ 0.57 \end{bmatrix}$, τότε:

$$M_2 \approx M_1 + 1.41 \cdot \begin{bmatrix} 0.70 \\ -0.04 \\ -0.72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.82 & 0.57 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } M_2 = \begin{bmatrix} 1.40 & 2.01 \\ 1.60 & 2.30 \\ 1.82 & 2.63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.81 & 0.56 \\ 0.05 & -0.03 \\ 0.83 & -0.58 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } M_2 = \begin{bmatrix} 2.21 & 2.57 \\ 1.65 & 2.27 \\ 2.65 & 2.05 \end{bmatrix}$$

Σφάλμα Frobenius: Ορίζεται ως:

$$\|M - M_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}$$

Για $k = 1$, έχουμε:

$$\|M - M_1\|_F = \sqrt{\sigma_2^2} = \sqrt{1.41^2} = 1.41$$

Για $k = 2$, M_2 πλησιάζει το A με μεγαλύτερη ακρίβεια και ελάχιστο σφάλμα.

Οπτικά, μια τέτοια προσέγγιση σημαίνει ότι η εικόνα διατηρεί τα βασικά της χαρακτηριστικά, με διαδοχική βελτίωση όσο προστίθενται όροι στην παραγοντοποίηση SVD.

5 Αποτελέσματα και Ανάλυση

Η εφαρμογή της Αποσύνθεσης Κατά Ιδιάζουσες Τιμές στο θεωρητικό παράδειγμα ανέδειξε τη δυνατότητα της μεθόδου να αναπαριστά πιστά τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά της αρχικής εικόνας μέσω της πρώτης ιδιάζουσας. Η προσέγγιση πρώτης τάξης $M_1 = \sigma_1 u_1 v_1^*$ παρείχε μία υπολογιστικά ελαφριά ανακατασκευή με μικρή απώλεια πληροφορίας, διατηρώντας τη δομή και τον συσχετισμό των δεδομένων της εικόνας.

Από μαθηματικής άποψης, το σφάλμα Frobenius μεταξύ του αρχικού πίνακα M και της προσέγγισης M_1 είναι περιορισμένο, γεγονός που επιβεβαιώνει την επάρκεια της μεθόδου στην αναπαράσταση οπτικών δεδομένων. Η χρήση ορθογώνιου αλλά διαγώνιου πίνακα Σ τεκμηριώνει τη δυνατότητα διατήρησης πληροφορίας ακόμα και σε μη τετραγωνικούς πίνακες εικόνας.

Επιπλέον, η οπτική απεικόνιση του παραδείγματος μέσω διαγράμματος επιβεβαιώνει την ποιοτική ακρίβεια της ανακατασκευής, καθιστώντας την τεχνική κατάλληλη για εφαρμογές που απαιτούν υψηλό βαθμό συμπίεσης χωρίς σημαντική υποβάθμιση της πληροφορίας.

6 Συμπεράσματα

Η Αποσύνθεση Κατά Ιδιάζουσες Τιμές αποτελεί ένα θεωρητικά τεκμηριωμένο και πρακτικά αποδοτικό εργαλείο επεξεργασίας εικόνας. Η δυνατότητά της να μειώνει τη διαστασιμότητα και να συμπυκνώνει την πληροφορία χωρίς σημαντική απώλεια, την καθιστά κατάλληλη για εφαρμογές σε περιβάλλοντα υψηλών απαιτήσεων όπως η ιατρική απεικόνιση, η μηχανική όραση και τα συστήματα αποθήκευσης δεδομένων.

Η μελέτη ανέδειξε ότι η θεωρητική εφαρμογή της SVD, ακόμη και σε χαμηλών διαστάσεων παραδείγματα, διατηρεί ισχυρά τα ποιοτικά και υπολογιστικά της πλεονεκτήματα. Η κατανόηση της μαθηματικής δομής του μετασχηματισμού επιτρέπει την αξιοποίησή του σε προηγμένα σενάρια μηχανικής μάθησης και ανάλυσης δεδομένων, καθιστώντας την SVD αναπόσπαστο εργαλείο της σύγχρονης υπολογιστικής επιστήμης.

References

- [1] Howard C. Andrews and Christopher L. Patterson. Singular value decomposition (svd) image coding. *IEEE Transactions on Communications*, 24(4):425–432, 1976.
- [2] Michael Elad and Michal Aharon. Image denoising via sparse and redundant representations

- over learned dictionaries. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(12):3736–3745, 2006.
- [3] Gene H. Golub and Christian Reinsch. Singular value decomposition and least squares solution. *Numerische Mathematik*, 14(5):403–420, 1965.
 - [4] Nathan Halko, Per-Gunnar Martinsson, and Joel A. Tropp. Finding structure with randomness: Probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions. *SIAM Review*, 53(2):217–288, 2011.
 - [5] Per Christian Hansen. The truncated svd as a method for regularization. *BIT Numerical Mathematics*, 27(4):534–553, 1987.
 - [6] Per Christian Hansen. *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*. SIAM, 2010.
 - [7] Ian T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, 2002.
 - [8] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 2nd edition, 1993.
 - [9] Lloyd N. Trefethen and David Bau. *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997.
 - [10] Matthew Turk and Alex Pentland. Eigenfaces for recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 3(1):71–86, 1991.