

## 1 Άσκηση νευρωνικού δικτύου

Έστω ένα νευρωνικό δίκτυο με μια είσοδο  $x$ , έναν νευρώνα και μια έξοδο  $y$ . Η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η σιγμοειδής:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (1)$$

Η έξοδος του νευρώνα είναι:

$$y = \sigma(wx + b) \quad (2)$$

όπου  $w$  είναι το βάρος και  $b$  η πόλωση. Δίνονται τα δεδομένα εκπαίδευσης του δικτύου:

$x$	$y$
1	1
0	0

Να βρεθούν οι τιμές των  $w$  και  $b$  που να ελαχιστοποιούν το τετραγωνικό σφάλμα:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3)$$

### Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε την έξοδο του δικτύου για κάθε δεδομένο εκπαίδευσης:

- Για  $x = 1$  :  $\hat{y}_1 = \sigma(w + b)$
- για  $x = 0$  :  $\hat{y}_2 = \sigma(b)$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το τετραγωνικό σφάλμα:

$$E = \frac{1}{2} [1 - \sigma(w + b)^2 + (0 - \sigma(b))^2] \quad (4)$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα παίρνουμε τις μερικές παραγώγους του  $E$  προς  $w$  και  $b$  και τις θέτουμε ίσες με μηδέν.

$$\frac{\partial E}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad (5)$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού δίνει τις τιμές  $w$ ,  $b$  που ελαχιστοποιούν το σφάλμα.