

Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση των Μαθηματικών: Γραμμικός Προγραμματισμός

Κωνσταντινοπούλου Αντωνία - 12561

29 Μαΐου 2025

1. Εισαγωγή

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών και της επιχειρησιακής έρευνας. Αντικείμενό του είναι η εύρεση της βέλτιστης (μέγιστης ή ελάχιστης) τιμής μίας (γραμμικής) αντικειμενικής συνάρτησης, όταν αυτή υποκειται σε ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών.

Η θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού αναπτύχθηκε ραγδαία κατά τον 20ό αιώνα, ιδιαίτερα μετά τη δημοσίευση της μεθόδου **Simplex** από τον George Dantzig στα τέλη της δεκαετίας του 1940. Σκοπός του ήταν η επίλυση προβλημάτων κατανομής πόρων κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, κυρίως όπως είναι προφανές στον στρατιωτικό τομέα. Από τότε, ο Γ.Π. έχει εξελιχθεί σε ένα εργαλείο λήψης αποφάσεων σε πλήθος επιστημονικών και τεχνολογικών πεδίων.

1.1 Εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο Γ.Π. βρίσκει πρακτική εφαρμογή σε προβλήματα που προκύπτουν για παράδειγμα σε:

- **Βιομηχανία και Παραγωγή:** Κατανομή πρώτων υλών ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί το κόστος.
- **Διοίκηση Επιχειρήσεων:** Βελτιστοποίηση μεταφορικών κόστους, ροών αποθεμάτων, ή στρατηγικών μάρκετινγκ.
- **Οικονομικά:** Κατανομές πόρων μεταξύ επενδύσεων.
- **Γεωργία:** Επιλογή καλλιεργειών με βάση αποδόσεις, κόστος και διαθέσιμες εκτάσεις.

1.2 Γενικό Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού Π.Γ.Π.

Το γενικό πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\max \text{ (ή } \min \text{): } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

κάτω από τους περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \otimes b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \otimes b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \otimes b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Όπου:

- x_i είναι οι **μεταβλητές αποφάσεων** (πχ πόση ποσότητα προϊόντα να παραχθούν)
- το $\otimes$ συμβολίζει σχέση τύπου $\leq, \geq$ ή $=$
- z είναι η **αντικειμενική συνάρτηση** (πχ συνολικό κέρδος)

1.3 Μοντελοποίηση

Η μοντελοποίηση του προβλήματος αποτελεί καθοριστικό στάδιο πριν από την επίλυσή του, καθώς θέτει τις βάσεις για τη σωστή κατανόηση και μαθηματική αποτύπωση της πραγματικής κατάστασης. Μέσα από τη διαδικασία αυτή, εντοπίζονται οι στόχοι, οι περιορισμοί και οι μεταβλητές που συμμετέχουν, επιτρέποντας τη διατύπωση ενός ακριβούς και ρεαλιστικού μαθηματικού μοντέλου. Χωρίς ορθή μοντελοποίηση, ακόμη και οι πιο προηγμένες μέθοδοι επίλυσης μπορεί να οδηγήσουν σε αναποτελεσματικά ή άσχετα αποτελέσματα.

Παράδειγμα

Κατανομή Πόρων σε Παραγωγή Προϊόντων (Βιομηχανία)

Μια βιομηχανία παράγει δύο προϊόντα, A και B . Η επιχείρηση διαθέτει ημερησίως:

- 100 μονάδες πρώτης ύλης P
- 80 ώρες εργασίας

Για κάθε μονάδα:

- Το προϊόν A απαιτεί 4 μονάδες P και 2 ώρες εργασίας και αποφέρει κέρδος €6.
- Το προϊόν B απαιτεί 2 μονάδες P και 4 ώρες εργασίας και αποφέρει κέρδος €5.

Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως Π.Γ.Π.

Μοντελοποίηση:
έστω:

x : αριθμός μονάδων του προϊόντος A , y : αριθμός μονάδων του προϊόντος B

Αντικειμενική συνάρτηση (Μέγιστο Κέρδος):

$$\max z = 6x + 5y$$

Περιορισμοί:

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 100 & (\text{πρώτη ύλη } P) \\ 2x + 4y \leq 80 & (\text{εργατοώρες}) \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 & (\text{μη αρνητικότητα}) \end{cases}$$

2. Γραφική Επίλυση

Η **γραφική μέθοδος** είναι μια απλή τεχνική επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού που περιορίζονται σε δύο μεταβλητές x_1, x_2

2.1 Έννοιες

- **Εφικτή Λύση:** ένα ζεύγος (x_1, x_2) που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς
- **Εφικτή Περιοχή:** το υποσύνολο του επιπέδου $x_1 x_2$ που προσδιορίζεται από το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων
- **Κυρτό Σύνολο:** αν οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο σημείων ανήκει και αυτό στο σύνολο, η εφικτή περιοχή είναι κυρτό σύνολο
- **Φραγμένο Πρόβλημα:** όταν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη, δηλαδή μπορεί να περικλειστεί από έναν αρκετά μεγάλο κύκλο (διφορετικά είναι μη φραγμένη)
- **Ακραία Σημεία:** τα συνοριακά σημεία μιας εφικτής περιοχής που βρίσκονται στις τομές δύο συνοριακών ευθύγραμμων τμημάτων (γωνίες του πολυγώνου, εκεί όπου συναντώνται οι ευθείες των περιορισμών)

2.2 Βασικά Στοιχεία

Για την επίλυση ενός προβλήματος με τη γραφική μέθοδο ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Μετατρέπουμε όλους τους περιορισμούς σε ισότητες και σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο.

2. Καθορίζουμε την **εφικτή περιοχή** ως τη συμβολή των ημιεπιπέδων που ορίζουν οι περιορισμοί και οι συνθήκες $x_1, x_2 \geq 0$.

3. Προσδιορίζουμε την **αντικειμενική συνάρτηση** και σχεδιάζουμε μερικές ισοτιμές της για να δούμε την κατεύθυνση βελτιστοποίησης.

4. Εντοπίζουμε το ή τα **ακραία σημεία** της εφικτής περιοχής και υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτά.

5. Επιλέγουμε το σημείο που δίνει τη μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή, ανάλογα με τον στόχο.

2.3 Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$

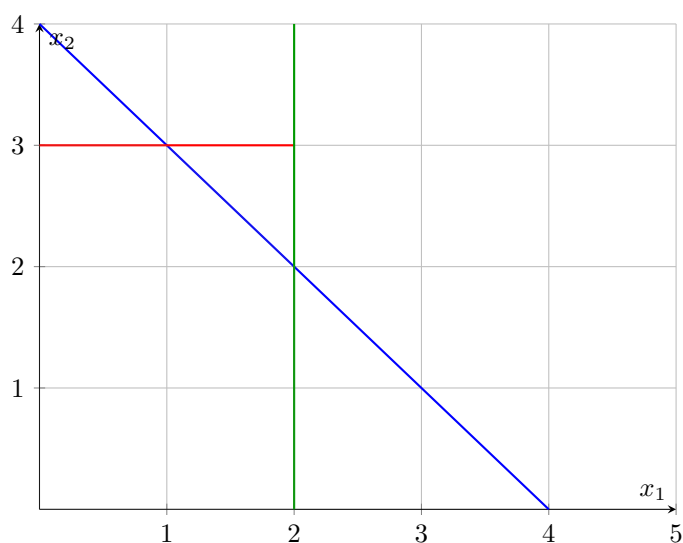
$$x_1 \leq 2 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Σχεδίαση των περιορισμών

Για κάθε περιορισμό, σχεδιάζουμε την αντίστοιχη ευθεία ως ισότητα και σκιαζουμε το κατάλληλο ημιεπίπεδο.



Εφικτή περιοχή: Το κοινό μέρος όλων των περιορισμών σχηματίζει ένα **κυρτό πολύγωνο**. Τα σημεία στα οποία τέμνονται οι ευθείες είναι τα **ακραία σημεία**.

2. Εύρεση των ακραίων σημείων

- $(0, 0)$ από τις συνθήκες $x_1, x_2 \geq 0$
- $(0, 3)$ από $x_2 = 3$ και $x_1 = 0$
- $(1, 3)$ από $x_1 + x_2 = 4$ και $x_2 = 3$
- $(2, 2)$ από $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 = 2$
- $(2, 0)$ από $x_1 = 2$ και $x_2 = 0$

3. Υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης

Σημείο	$z = 3x_1 + 2x_2$
$(0, 0)$	0
$(0, 3)$	6
$(1, 3)$	$3 + 6 = 9$
$(2, 2)$	$6 + 4 = 10$
$(2, 0)$	6

Άρα, η βέλτιστη λύση είναι: $x_1 = 2, x_2 = 2$, με $z = 10$.

2.4 Θεώρημα (Μέγιστες και Ελάχιστες Τιμές)

Αν η εφικτή περιοχή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι **μη κενή** και **φραγμένη**, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε ένα ή περισσότερα από τα **ακραία σημεία** της.

Αν η εφικτή περιοχή είναι **μη φραγμένη**, τότε η αντικειμενική συνάρτηση:

- μπορεί να μην λάβει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή
- αν ωστόσο λάβει, τότε επιτυγχάνεται πάλι σε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής

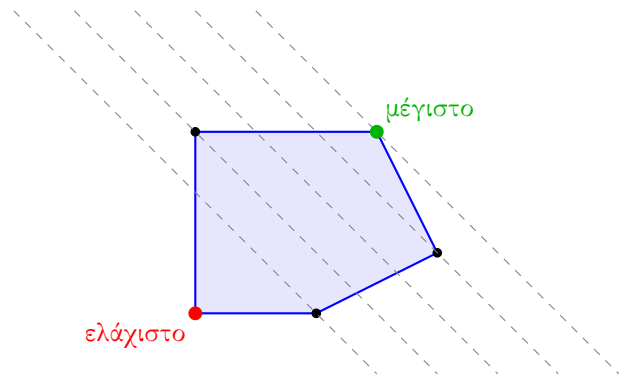
Γεωμετρική Διαίσθηση:

Η αντικειμενική συνάρτηση ενός γραμμικού προβλήματος έχει τη μορφή:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Οι ισοϋψείς καμπύλες $z = \text{σταθερά}$ είναι ευθείες γραμμές. Καθώς μετακινούμαστε κάθετα προς την κατεύθυνση $\vec{c} = (c_1, c_2)$, η τιμή του z αυξάνεται μονοτονικά. Μέσα σε μια φραγμένη εφικτή περιοχή, οι γραμμές αυτές θα «γλιστρούν» μέχρι να φτάσουν στο τελευταίο σημείο επαφής με την εφικτή περιοχή, το οποίο είναι πάντα ένα ακραίο σημείο (κορυφή πολύγωνου).

Άρα η βέλτιστη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) επιτυγχάνεται πάντα σε ένα από τα ακραία σημεία της εφικτής περιοχής.



2.5 Πρόβλημα Γραφικής Επίλυσης

Για προβλήματα με **2 μεταβλητές**, η λύση μπορεί να επιτευχθεί **γραφικά**, μέσω σχεδίασης της εφικτής περιοχής και εντοπισμού της βέλτιστης τιμής, όπως είδαμε πριν.

Ωστόσο, σε πρακτικά προβλήματα έχουμε να αντιμετωπίσουμε:

- Δεκάδες, εκατοντάδες ή χιλιάδες μεταβλητές
- Περίπλοκους περιορισμούς και μεγάλο όγκο δεδομένων
- Απαιτείται ταχύτητα στη λήψη απόφασης

Γι' αυτό τον λόγο, αναπτύχθηκαν αλγοριθμικές μέθοδοι όπως:

- Η **μέθοδος Simplex**, που εξερευνά τις κορυφές του εφικτού πολύεδρου και βρίσκει τη βέλτιστη λύση με πολύ πιο αποδοτικό τρόπο

3. Η Μέθοδος Simplex

3.1 Τυπική (Κανονική) Μορφή του Π.Γ.Π.

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος **Simplex** πρέπει το Π.Γ.Π. να βρίσκεται στην τυπική μορφή του.

Χαρακτηριστικά Τυπικής Μορφής

- η αντικειμενική συνάρτηση είναι προς **μεγιστοποίηση**
- όλοι οι περιορισμοί είναι **εξισώσεις**
- όλοι οι σταθεροί όροι είναι **μη αρνητικοί** ($b_j \geq 0$)
- όλες οι μεταβλητές είναι **μη αρνητικές** ($x_i \geq 0$)

Μετατροπή

- αν έχουμε Π.Γ.Π. ελαχιστοποίησης, πολλαπλασιάζουμε την αντικειμενική μας συνάρτηση με -1 ώστε να γίνει μεγιστοποίησης.

$$\min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \implies \max z' = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

- αν κάποιος από τους σταθερούς όρους b_j είναι αρνητικός, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη του αντίστοιχου περιορισμού με -1
- οι περιορισμοί της μορφής $\geq$ ή $\leq$ ανάγονται σε εξισώσεις με την εισαγωγή μη αρνητικών τεχνικών μεταβλητών

$$\text{Αν } a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \text{ τότε: } a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + x_r = b_k, \text{ με } x_r \geq 0$$

$$\text{Αν } a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n \geq b_l, \text{ τότε: } a_{l1}x_1 + \dots + a_{ln}x_n - x_s = b_l, \text{ με } x_s \geq 0$$

- αν υπάρχουν μεταβλητές $x_i \in \mathbb{R}$, τις αντικαθιστούμε με τη διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών,

$$x_i = x'_i - x''_i, \text{ όπου } x'_i, x''_i \geq 0$$

ενώ αν έχουμε μεταβλητή $x_i \leq 0$, θέτουμε,

$$x_i = -x'_i, \text{ όπου } x'_i \geq 0$$

References

- [1] Κεχαγιάς Ν., *Εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας*, Τμήμα Μαθηματικών Ιωαννίνων., 2008.
- [2] Howard Anton, Chris Rorres, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*
- [3] Rardin, R.L., *Βελτιστοποίηση στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Δεύτερη Αμερικανική Έκδοση
- [4] Βασιλείου Π.Χ., Τσάντας Ν., *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*
- [5]
- [6]
- [7]
- [8]
- [9]
- [10]

3.2 Βήματα του Αλγορίθμου Simplex

- Μετατροπή σε τυπική μορφή:** Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυπική μορφή και κατασκευάζουμε το αρχικό πίνακα Simplex (tableau), επιλέγοντας μια (προφανή) αρχική βασική εφικτή λύση
- Έλεγχος βελτιστοποίησης:** Αν όλα τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής (γραμμή z) είναι μη αρνητικά, τότε η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη. Διαφορετικά, προχωράμε
- Επιλογή εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής:** Εντοπίζουμε το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία γραμμή, η αντίστοιχη μεταβλητή εισέρχεται στη βάση και η στήλη της γίνεται **στήλη οδηγός**. Υπολογίζουμε τους λόγους $\frac{b_j}{a_{ij}}$, χρησιμοποιώντας μόνο τα θετικά στοιχεία της στήλης οδηγού. Η μικρότερη τιμή καθορίζει τη **γραμμή οδηγό**, και η βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτήν εξέρχεται από τη βάση. Το στοιχείο τομής στήλης και γραμμής οδηγού λέγεται **πιλότος**
- Ανανεώνουμε τον πίνακα:** Διαιρούμε όλη τη γραμμή οδηγό με το στοιχείο πιλότο ώστε να γίνει 1. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε γραμμοπράξεις ώστε να μηδενιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης οδηγού.
- Επανάληψη:** Επιστρέφουμε στο Βήμα 2 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι όλα τα στοιχεία της γραμμής z να γίνουν μη αρνητικά.