

Ασκήσεις Μαθηματικών

Χαλκίδου Ειρήνη

May 12, 2025

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Ασκήσεις	4
2.1	Άσκηση 1	4
2.2	Άσκηση 2	5
2.3	Άσκηση 3	6
2.4	Άσκηση 4	7
2.5	Άσκηση 5	9

1 Εισαγωγή

Στο παρόν αρχείο παρατίθενται πέντε ασκήσεις μαθηματικών που εφαρμόζουν βασικές έννοιες και απλές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων στους διάφορους τομείς. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά σε μεθόδους επίλυσης ολοκληρωμάτων, σε γραμμικά συστήματα και σε απλά προβλήματα συνδυαστικής ανάλυσης πιθανοτήτων. Τέλος, θα δούμε και δύο ασκήσεις που στηρίζονται σε γεωμετρική επίλυση με γραφική παράσταση στο επίπεδο ή στον χώρο.

2 Ασκήσεις

2.1 Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκληρώμα:

$$\int_0^1 (2x-1)^{2025} (x+2) dx \quad (1)$$

Λύση

Υποθέτουμε $u = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{u+1}{2}$ Οπότε, $du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

Άκρα Ολοκληρώματος:

- Για $x = 0 \Rightarrow u = 2(0) - 1 \Rightarrow u = -1$
- Για $x = 1 \Rightarrow u = 2(1) - 1 \Rightarrow u = 1$

Άρα, από τα παραπάνω το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_{-1}^1 u^{2025} \left(\frac{u+1}{2} + 2 \right) \frac{du}{2} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} u^{2025} \left(\frac{u+1}{2} + \frac{4}{2} \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} u^{2025} \left(\frac{u+5}{2} \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4} u^{2025} (u+5) du \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 u^{2025} (u+5) du \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (u^{2026} + 5u^{2025}) du \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^1 u^{2026} du + \int_{-1}^1 5u^{2025} du \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{u^{2027}}{2027} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{5u^{2026}}{2026} \right]_{-1}^1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1^{2027}}{2027} - \frac{(-1)^{2027}}{2027} + \frac{5(1)^{2026}}{2026} - \frac{5(-1)^{2026}}{2026} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2027} + \frac{1}{2027} + \frac{5}{2026} - \frac{5}{2026} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{2027} + 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \frac{2}{2027} \\
&= \frac{1}{4054}
\end{aligned}$$

2.2 Άσκηση 2

Στο επίπεδο δίνονται δύο σημεία Α και Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα Α και Β είναι σταθερός και ίσος με $k \neq 1$. Στη συνέχεια, να τον σχεδιάσετε για $k = 2$ και $\alpha = 1$.

Λύση

Έστω $(AB) = 2\alpha = \text{σταθ.}$ και ας θεωρήσουμε ένα (ορθοκανονικό) σύστημα συντεταγμένων με αρχή το μέσον Ο του ΑΒ και θετικό x-ημιάξονα την ημιευθεία ΟΑ. Τότε, $A = (\alpha, 0)$ και $B = (-\alpha, 0)$. Αν $M = (x, y)$ είναι ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου θα έχουμε ότι: $\frac{(MA)}{(MB)} = k \Leftrightarrow \frac{(MA)^2}{(MB)^2} = k^2$ Δηλαδή,

$$\frac{(x - \alpha)^2 + y^2}{(x + \alpha)^2 + y^2} = k^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2(k^2 + 1)\alpha}{k^2 - 1}x + \alpha^2 = 0$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το σημείο

$$K = \left(-\frac{(k^2 + 1)\alpha}{k^2 - 1}, 0 \right)$$

και ακτίνα

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4(k^2 + 1)\alpha^2}{(k^2 - 1)^2} - 4\alpha^2} = \frac{2k\alpha}{|k^2 - 1|}$$

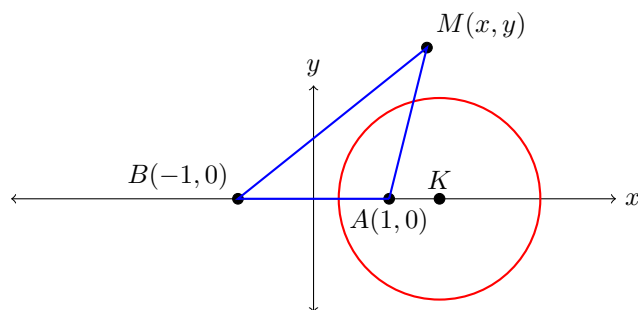
Για $k = 2$ και $\alpha = 1$ έχουμε τον κύκλο με κέντρο

$$K = \left(-\frac{(2^2 + 1) \cdot 1}{2^2 - 1}, 0 \right) = \left(\frac{(4 + 1) \cdot 1}{4 - 1}, 0 \right) \Leftrightarrow K = \left(\frac{5}{3}, 0 \right)$$

και ακτίνα

$$R = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{|2^2 - 1|} = \frac{4}{|4 - 1|} = \frac{4}{3}$$

Η γραφική παράσταση είναι η εξής:



2.3 Άσκηση 3

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \quad (2)$$

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (Σ) . Ο πίνακας των συντελεστών του (Σ) , ο πίνακας στήλη των αγνώστων του (Σ) και ο πίνακας σταθερών του (Σ) είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Έτσι το (Σ) γράφεται ως:

$$(\Sigma) : A \cdot X = B$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του (Σ) είναι ο 3×4 πίνακας:

$$(A | B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Τότε η εκτέλεση πράξεων στις εξισώσεις του (Σ) ερμηνεύονται ως στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) ως εξής:

$$(A | B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

απόπου έπεται ότι μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές στους αγνώστους x_2 και x_3 , οι οποίοι δεν αντιστοιχούν σε οδηγούς στην γ-κλιμακωτή μορφή του A , έστω $x_2 = k$ $x_3 = \lambda$, όπου k, λ είναι τυχαία στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$ και τότε

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 + 2k - \lambda - 1 = 2k - \lambda \end{cases}$$

Άρα, το αρχικό σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους (δηλαδή αυθαίρετα στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$, και οι λύσεις είναι οι εξής:

$$\begin{cases} x_1 = 2k - \lambda \\ x_2 = k \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad k, \lambda \in \mathbb{R}$$

2.4 Άσκηση 4

Η διάρκεια ζωής σε έτη ενός τύπου φορητού υπολογιστή είναι η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1.5$ έτη. Επιλέγεται τυχαία ένας υπολογιστής του συγκεκριμένου τύπου.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής του να είναι περισσότερο από 5 έτη και λιγότερο από 6,5 έτη;

(β) Πόσα έτη εγγύηση πρέπει να παρέχει ο κατασκευαστής του συγκεκριμένου τύπου υπολογιστή, αν θέλει κατά την διάρκεια της εγγύησης να αντικαταστήσει το πολύ 10% των υπολογιστών;

Λύση

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \equiv$ η διάρκεια ζωής ενός υπολογιστή.

(α) Από τα δεδομένα έχουμε $X \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 1.5^2)$. Εφαρμόζοντας τον τυπικό μετασχηματισμό προκύπτει

$$Z = \frac{X - 5}{1.5} \sim N(0, 1)$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(5|X|6.5)$.

$$\begin{aligned} P(5 < X < 6.5) &= P\left(\frac{5-5}{1.5} < \frac{X-5}{1.5} < \frac{6.5-5}{1.5}\right) \\ &= P(0 < Z < 1) \\ &= \Phi_Z(1) - \Phi_Z(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

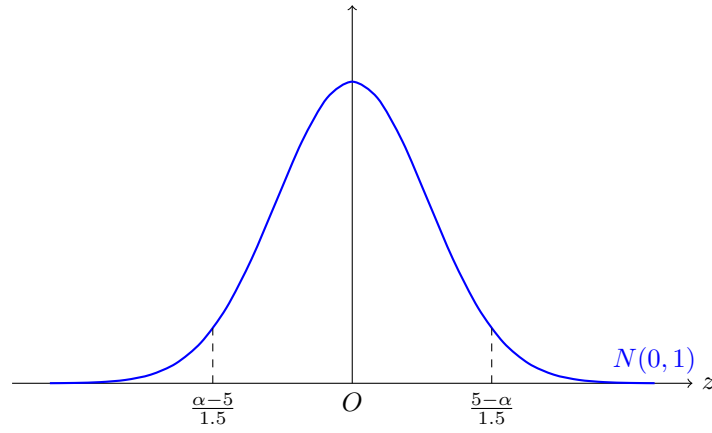
Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(5 < X < 6.5) = 0.3413$$

(β) Έστω αη εγγύηση σε έτη. Ψάχνουμε το α για το οποίο

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &\leq 0.1 \\ \Rightarrow P\left(\frac{X-5}{1.5} \leq \frac{\alpha-5}{1.5}\right) &\leq 0.1 \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha-5}{1.5}\right) &\leq 0.1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το $\frac{\alpha-5}{1.5} < 0$



Άρα,

$$\begin{aligned}
 &P\left(Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) < 0.1 \\
 \Rightarrow &1 - P\left(Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.1 \\
 \Rightarrow &P\left(Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.9 \\
 \Rightarrow &0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.9 \\
 \Rightarrow &P\left(0 \leq Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) - \Phi_Z(0) = 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) - 0 = 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) = 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) \simeq \Phi_Z(1.28)
 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{5-\alpha}{1.5} \geq 1.28 \Rightarrow 5-\alpha \geq 1.92 \Rightarrow \alpha \leq 5-1.92 \Rightarrow \alpha \leq 3.08$$

Επομένως, η εγγύηση είναι το πολύ 3 έτη.

2.5 Άσκηση 5