

Ασκήσεις Μαθηματικών

Χαλκίδου Ειρήνη

June 17, 2025

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Ασκήσεις	4
2.1	Άσκηση 1	4
2.2	Άσκηση 2	5
2.3	Άσκηση 3	6
2.4	Άσκηση 4	7
2.5	Άσκηση 5	9

1 Εισαγωγή

Στο παρόν αρχείο παρατίθενται πέντε ασκήσεις μαθηματικών που εφαρμόζουν βασικές έννοιες και απλές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων στους διάφορους τομείς. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά σε μεθόδους επίλυσης ολοκληρωμάτων, σε γραμμικά συστήματα και σε απλά προβλήματα συνδυαστικής ανάλυσης πιθανοτήτων. Τέλος, θα δούμε και δύο ασκήσεις που στηρίζονται σε γεωμετρική επίλυση με γραφική παράσταση στο επίπεδο ή στον χώρο.

2 Ασκήσεις

2.1 Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκληρώμα:

$$\int_0^1 (2x-1)^{2025} (x+2) dx \quad (1)$$

Λύση

Υποθέτουμε $u = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{u+1}{2}$ Οπότε, $du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

Άκρα Ολοκληρώματος:

- Για $x = 0 \Rightarrow u = 2(0) - 1 \Rightarrow u = -1$
- Για $x = 1 \Rightarrow u = 2(1) - 1 \Rightarrow u = 1$

Άρα, από τα παραπάνω το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_{-1}^1 u^{2025} \left(\frac{u+1}{2} + 2 \right) \frac{du}{2} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} u^{2025} \left(\frac{u+1}{2} + \frac{4}{2} \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} u^{2025} \left(\frac{u+5}{2} \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4} u^{2025} (u+5) du \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 u^{2025} (u+5) du \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (u^{2026} + 5u^{2025}) du \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^1 u^{2026} du + \int_{-1}^1 5u^{2025} du \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{u^{2027}}{2027} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{5u^{2026}}{2026} \right]_{-1}^1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1^{2027}}{2027} - \frac{(-1)^{2027}}{2027} + \frac{5(1)^{2026}}{2026} - \frac{5(-1)^{2026}}{2026} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2027} + \frac{1}{2027} + \frac{5}{2026} - \frac{5}{2026} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{2027} + 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \frac{2}{2027} \\
&= \frac{1}{4054}
\end{aligned}$$

2.2 Άσκηση 2

Στο επίπεδο δίνονται δύο σημεία Α και Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα Α και Β είναι σταθερός και ίσος με $k \neq 1$. Στη συνέχεια, να τον σχεδιάσετε για $k = 2$ και $\alpha = 1$.

Λύση

Έστω $(AB) = 2\alpha = \text{σταθ.}$ και ας θεωρήσουμε ένα (ορθοκανονικό) σύστημα συντεταγμένων με αρχή το μέσον Ο του ΑΒ και θετικό x-ημιάξονα την ημιευθεία ΟΑ. Τότε, $A = (\alpha, 0)$ και $B = (-\alpha, 0)$. Αν $M = (x, y)$ είναι ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου θα έχουμε ότι: $\frac{(MA)}{(MB)} = k \Leftrightarrow \frac{(MA)^2}{(MB)^2} = k^2$ Δηλαδή,

$$\frac{(x - \alpha)^2 + y^2}{(x + \alpha)^2 + y^2} = k^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2(k^2 + 1)\alpha}{k^2 - 1}x + \alpha^2 = 0$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το σημείο

$$K = \left(-\frac{(k^2 + 1)\alpha}{k^2 - 1}, 0 \right)$$

και ακτίνα

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4(k^2 + 1)\alpha^2}{(k^2 - 1)^2} - 4\alpha^2} = \frac{2k\alpha}{|k^2 - 1|}$$

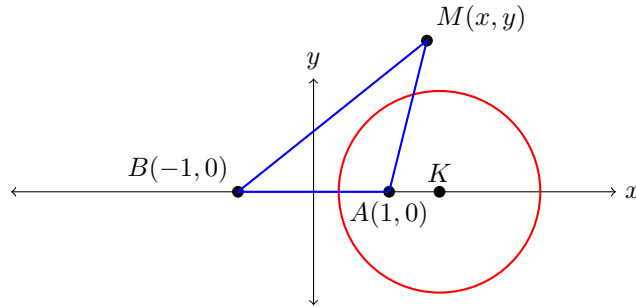
Για $k = 2$ και $\alpha = 1$ έχουμε τον κύκλο με κέντρο

$$K = \left(-\frac{(2^2 + 1) \cdot 1}{2^2 - 1}, 0 \right) = \left(\frac{(4 + 1) \cdot 1}{4 - 1}, 0 \right) \Leftrightarrow K = \left(\frac{5}{3}, 0 \right)$$

και ακτίνα

$$R = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{|2^2 - 1|} = \frac{4}{|4 - 1|} = \frac{4}{3}$$

Η γραφική παράσταση είναι η εξής:



2.3 Άσκηση 3

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \quad (2)$$

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (Σ) . Ο πίνακας των συντελεστών του (Σ) , ο πίνακας στήλη των αγνώστων του (Σ) και ο πίνακας σταθερών του (Σ) είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Έτσι το (Σ) γράφεται ως:

$$(\Sigma) : A \cdot X = B$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του (Σ) είναι ο 3×4 πίνακας:

$$(A | B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Τότε η εκτέλεση πράξεων στις εξισώσεις του (Σ) ερμηνεύονται ως στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) ως εξής:

$$(A | B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

απόπου έπεται ότι μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές στους αγνώστους x_2 και x_3 , οι οποίοι δεν αντιστοιχούν σε οδηγούς στην γ-κλιμακωτή μορφή του A , έστω $x_2 = k$ $x_3 = \lambda$, όπου k, λ είναι τυχαία στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$ και τότε

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 + 2k - \lambda - 1 = 2k - \lambda \end{cases}$$

Άρα, το αρχικό σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους (δηλαδή αυθαίρετα στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$, και οι λύσεις είναι οι εξής:

$$\begin{cases} x_1 = 2k - \lambda \\ x_2 = k \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad k, \lambda \in \mathbb{R}$$

2.4 Άσκηση 4

Η διάρκεια ζωής σε έτη ενός τύπου φορητού υπολογιστή είναι η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1.5$ έτη. Επιλέγεται τυχαία ένας υπολογιστής του συγκεκριμένου τύπου.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής του να είναι περισσότερο από 5 έτη και λιγότερο από 6,5 έτη;

(β) Πόσα έτη εγγύηση πρέπει να παρέχει ο κατασκευαστής του συγκεκριμένου τύπου υπολογιστή, ανβ θέλει κατά την διάρκεια της εγγύησης να αντικαθιστά το πολύ 10% των υπολογιστών;

Λύση

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \equiv$ η διάρκεια ζωής ενός υπολογιστή.

(α) Από τα δεδομένα έχουμε $X \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 1.5^2)$. Εφαρμόζοντας τον τυπικό μετασχηματισμό προκύπτει

$$Z = \frac{X - 5}{1.5} \sim N(0, 1)$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(5|X|6.5)$.

$$\begin{aligned} P(5 < X < 6.5) &= P\left(\frac{5-5}{1.5} < \frac{X-5}{1.5} < \frac{6.5-5}{1.5}\right) \\ &= P(0 < Z < 1) \\ &= \Phi_Z(1) - \Phi_Z(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

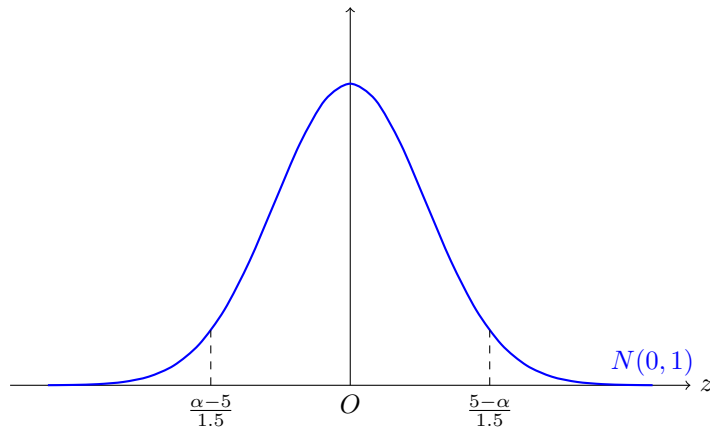
Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(5 < X < 6.5) = 0.3413$$

(β) Έστω αη εγγύηση σε έτη. Ψάχνουμε το α για το οποίο

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &\leq 0.1 \\ \Rightarrow P\left(\frac{X-5}{1.5} \leq \frac{\alpha-5}{1.5}\right) &\leq 0.1 \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha-5}{1.5}\right) &\leq 0.1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το $\frac{\alpha-5}{1.5} < 0$



Άρα,

$$\begin{aligned}
 &P\left(Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) < 0.1 \\
 \Rightarrow &1 - P\left(Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.1 \\
 \Rightarrow &P\left(Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.9 \\
 \Rightarrow &0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.9 \\
 \Rightarrow &P\left(0 \leq Z \leq \frac{5-\alpha}{1.5}\right) \leq 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) - \Phi_Z(0) = 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) - 0 = 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) = 0.4 \\
 \Rightarrow &\Phi_Z\left(\frac{5-\alpha}{1.5}\right) \simeq \Phi_Z(1.28)
 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{5-\alpha}{1.5} \geq 1.28 \Rightarrow 5-\alpha \geq 1.92 \Rightarrow \alpha \leq 5-1.92 \Rightarrow \alpha \leq 3.08$$

Επομένως, η εγγύηση είναι το πολύ 3 έτη.

2.5 Άσκηση 5

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(4,-1)$ και $C(6,1)$. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο και τον κύκλο στο επίπεδο.

Λύση

Ο γενικός τύπος του κύκλου είναι:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

ή επεκτείνοντας:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Θα βρούμε την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις συνετεταγμένες των σημείων. Βάζουμε κάθε σημείο στην εξίσωση του κύκλου:

$$\rightarrow A(2, 3) :$$

$$2^2 + 3^2 + 2D + 3E + F = 0 \Rightarrow 2D + 3E + F = -13 \quad (3)$$

$$\rightarrow B(4, -1) :$$

$$4^2 + (-1)^2 + 4D - E + F = 0 \Rightarrow 4D - E + F = -17 \quad (4)$$

$$\rightarrow C(6, 1) :$$

$$6^2 + 1^2 + 6D + E + F = 0 \Rightarrow 6D + E + F = -37 \quad (5)$$

Λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2D + 3E + F = -13 \\ 4D - E + F = -17 \\ 6D + E + F = -37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4D - E + F) - (2D + 3E + F) = -17 - (-13) \Rightarrow 2D - 4E = -4 \Rightarrow D - 2E = -2 \\ (6D + E + F) - (2D + 3E + F) = -37 - (-13) \Rightarrow 4D - 2E = -24 \Rightarrow 2D - E = -12 \end{cases}$$

Άρα, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} D - 2E = -2 \\ 2D - E = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -2 + 2E \\ 2(-2 + 2E) - E = -12 \Rightarrow 3E = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{-22}{3} \\ E = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

Κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει:

$$2 \left(\frac{-22}{3} \right) + 3 \left(\frac{-8}{3} \right) + F = -13 \Rightarrow F = \frac{29}{3}$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 - \frac{22}{3}x - \frac{8}{3}y + \frac{29}{3} = 0$$

Πολλαπλασιάζω με το 3 και η τελική εξίσωση είναι

$$3x^2 + 3y^2 - 22x - 8y + 29 = 0$$

