

Τα μαθηματικά πίσω από τη "Θεωρία Ουρών"

Αθανάσιος Πέτγαζλης

April 18, 2021

1 Εισαγωγή

Όλοι μας έχουμε βιώσει την δυσάρεστη εμπειρία της αναμονής σε μία ουρά με σκοπό την εξυπηρέτησή μας για κάποια ανάγκη. Δυστυχώς το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα συνηθισμένο στις τεχνολογικά ανεπτυγμένες κοινωνίες. Περιμένουμε σε ουρές στην κίνηση στον δρόμο, στα διόδια, στα τηλεφωνικά κέντρα εξυπηρέτησης, στα ταμεία των supermarkets, στις τράπεζες, στα ταχυδρομεία κτλ. Στην αναμονή αυτή πελάτες ονομάζονται είτε τα φυσικά πρόσωπα, σε περιπτώσεις όπως οι ουρές των ταχυδρομείων και των τραπεζών, είτε τα αεροπλάνα, στην περίπτωση του αεροδρομίου, είτε δεδομένα σε ένα υπολογιστικό σύστημα κτλ. Στους πελάτες όπως είναι φυσικό δεν αρέσει αυτή η κατάσταση της αναμονής. Η ίδια κατάσταση είναι όμως δυσάρεστη και στους διαχειριστές συστημάτων όπως τα ανωτέρω, λόγω του γεγονότος ότι η αναμονή σε κάποια ουρά αυξάνει το λειτουργικό κόστος του συστήματος. Άρα προκύπτει εύλογα το ερώτημα: "Γιατί λοιπόν να υπάρχει αναμονή;" Η απάντηση είναι απλή: Υπάρχει μεγαλύτερη ζήτηση για εξυπηρέτηση από την εξυπηρέτηση που μπορεί να προσφέρει η υπάρχουσα υποδομή. Σε γενική περίπτωση, ένα σύστημα διαθέτει υπαλλήλους για την εξυπηρέτηση και έναν χώρο αναμονής με άπειρη ή περιορισμένη χωρητικότητα. Στην ουρά αναμονής υπάρχει τυχαιότητα τόσο στους χρόνους των αφίξεων των διαδοχικών πελατών όσο και στους χρόνους εξυπηρέτησης κάθε πελάτη. Λόγω αυτής της τυχαιότητας, ο αριθμός των παρόντων πελατών στο σύστημα (μήκος ουράς) αυξομειώνεται ως συνάρτηση του χρόνου κατά τυχαίο τρόπο, είναι δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία ή ανέλιξη. Έτσι οι ουρές αναμονής αποτελούν ένα πεδίο εφαρμογής των στοχαστικών δι-

αδικασιών και κατα επέκταση των μαθηματικών. [4]
[3]

2 Ιστορική Αναδρομή και Εφαρμογές

Η μελέτη των συστημάτων αναμονής ξεκίνησε από την τηλεφωνία. Πρωτοπόρος ερευνητής ήταν ο Δανός μαθηματικός A.K. Erlang ο οποίος εργαζόταν στα Bell Labs, ανέπτυξε τις βασικές αρχές της θεωρίας Ουράς και το 1909 δημοσίευσε το "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations". Το 1927 ο E.C. Molina δημοσίευσε το "Application of the Theory of Probability to Telephone trunking problems" και ένα χρόνο αργότερα ο Thornton Fry δημοσίευσε το "Probability and its engineering users" το οποίο επεκτάθηκε πάνω στην προηγούμενη δουλειά του Erlang. Στις αρχές του 1930 ο Felix Pollaczek έκανε πρωτοπόρα δουλειά στην είσοδο Poisson, στην αυθαίρετη έξοδο, και στα προβλήματα μονών/ πολλαπλών καναλιών. Την ίδια περίοδο αντίστοιχη δουλειά γινόταν στην Ρωσία από τους Kolmogorov και Khintchine, στην Γαλλία από τον Crommelin και στην Σουηδία από τον Palm. Μέχρι το 1950 η θεωρία ουρών παρουσίαζε αργή ανάπτυξη αλλά στην συνέχεια γνώρισε μεγάλη άνοδο. Στην δεκαετία του 1960 η θεωρία ουρών ενισχύθηκε σημαντικά από τα επιστημονικά πεδία του Computer engineering και των δικτύων επικοινωνίας μέσω υπολογιστών. Στην επόμενη δεκαετία η θεωρία ουρών κατάφερε να συμβαδίσει με την μεγάλη ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων, των δικτύων των υπολογιστών και των δορυφορικών επικοινωνιών. Στην σημερινή εποχή, δίνεται στην βιβλιογραφία μεγάλη

έμφαση στις ακριβείς λύσεις στα προβλήματα ουρών με την χρήση έξυπνων μαθηματικών κόλπων. Με την βοήθεια της μεγάλης υπολογιστικής ισχύος η οποία, λόγω της ανάπτυξης των προσωπικών υπολογιστών είναι διαθέσιμη στον καθένα τώρα πια, η θεωρία ουρών αναπτύσσεται ραγδαία σε πολλούς τομείς της καθημερινής ζωής. Η θεωρία ουρών χρησιμοποιεί την δημιουργία μοντέλων και την άμεση χρήση των τεχνικών αυτών στη διαχείριση της λήψης αποφάσεων. Είναι τόσο ισχυρή, επειδή η πανταχού παρούσα κατάσταση των ουρών σημαίνει ότι υπάρχουν αμέτρητες και διαφορετικές εφαρμογές της. Μερικές από αυτές συναντάμε σε τομείς όπως:

- Τηλεπικοινωνίες
- Μεταφορές
- Λογιστική
- Οικονομία
- Υπηρεσίες Έκτακτης Ανάγκης
- Χρήση Υπολογιστών
- Project management

[2] [8]

3 Η θεωρία και ένα μαθηματικό μοντέλο

Ένα σύστημα αναμονής δέχεται πελάτες από μια πηγή εισόδου. Ο αριθμός των πελατών, που εισέρχονται στο σύστημα, μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος. Το σύστημα αναμονής περιλαμβάνει μια γραμμή αναμονής (ουρά), η οποία αποτελείται από πελάτες, που περιμένουν, αν όλες οι θέσεις εξυπηρέτησης είναι απασχολημένες. Αν υπάρχουν περισσότερες παράλληλες και ανεξάρτητες γραμμές αναμονής, τότε αυτές εξετάζονται ως διαφορετικά και ανεξάρτητα συστήματα. Χαρακτηριστικά στοιχεία της γραμμής αναμονής είναι το μέγιστο επιτρεπόμενο μήκος και η πειθαρχία της. Αν και στις περισσότερες των περιπτώσεων θεωρείται, ότι η ουρά μπορεί να έχει άπειρο μήκος, υπάρχουν συστήματα, στα οποία ο χώρος,

που διατίθεται για την ουρά, είναι προκαθορισμένος και χωρά ορισμένο αριθμό πελατών. Η πειθαρχία της ουράς καθορίζει τη σειρά προτεραιότητας για την εξυπηρέτηση του επόμενου πελάτη. Η πιο συνηθισμένη ονομάζεται FCFS (First Come First Served). Παρόλα αυτά υπάρχουν και άλλες πειθαρχίες όπως η LCFS (Last Come First Served) και η τυχαία επιλογή του πελάτη προς εξυπηρέτηση (SIRO, Service In Random Order). Τέλος, ο μηχανισμός εξυπηρέτησης χαρακτηρίζεται κυρίως από τον αριθμό των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης στο σύστημα και την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των πελατών, από την έναρξη μέχρι την ολοκλήρωσή της. Μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης οι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα. Σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται κατανοητό, ότι οι δυνατοί συνδυασμοί των χαρακτηριστικών στοιχείων των συστημάτων αναμονής είναι πάρα πολλοί. Επομένως χρησιμοποιείται μια συντομογραφία, που αποτελείται από έξι σύμβολα $A/B/c/k/m/z$, για την περιγραφή του κάθε συστήματος. Στη συντομογραφία αυτή, το c χαρακτηρίζει τον αριθμό των εξυπηρετητών, ενώ τα A και B καθορίζουν την κατανομή των χρόνων άφιξης και εξυπηρέτησης αντίστοιχα. Το σύμβολο k αντιπροσωπεύει το μέγιστο αριθμό πελατών, που μπορούν να βρίσκονται στο σύστημα. Τέλος, το σύμβολο m χαρακτηρίζει το μέγεθος του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχονται οι αφίξεις και το z την πειθαρχία της ουράς. Για λογούς απλούστευσης, θα παρουσιάσουμε το μοντέλο $M/M/c$ (c μονάδες εξυπηρέτησης).

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Υπάρχει μόνο μία ουρά εξυπηρέτησης. Η σειρά εξυπηρέτησης είναι first-in, first-out (FIFO).
- Κάθε αντικείμενο εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης.
- Ο ρυθμός άφιξης των αντικειμένων ακολουθεί κατανομή Poisson.
- Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Τα αντικείμενα προέρχονται από ένα άπειρο ή πολύ μεγάλο πλήθος.

Έχουμε τις εξής παραμέτρους:

- λ = ρυθμός αφίξεων (ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα).
- μ = ρυθμός εξυπηρέτησης (ο μέσος αριθμός αντικειμένων που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα και ανά μονάδα εξυπηρέτησης).
- c = αριθμός μονάδων εξυπηρέτησης. Σημειώνεται ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης για όλο το σύστημα είναι $c \times \mu$ και πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό άφιξης. Σε αυτό το μοντέλο:
- Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right)}$$

- Η πιθανότητα να υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι:

$$P_n = \frac{1}{c! c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, n > c$$

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, n \leq c$$

- Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (δηλ. και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι:

$$L = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c}{(c-1)!(c\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

- Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

- Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

- Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- Η πιθανότητα να είναι απασχολημένες όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης, δηλαδή ότι θα υπάρξει αναμονή για κάποιο αντικείμενο που φτάνει στην ουρά, είναι:

$$P_W = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{c}{c\mu - \lambda} P_0$$

[7] [9] [1]

4 Παράδειγμα(Εφαρμογή Μοντέλου)

Σε ένα κομβικό σημείο ενός δικτύου με μία είσοδο και τρεις εξόδους φτάνουν κατά μέσο όρο 20 πακέτα δεδομένων το δευτερόλεπτο. Κάθε γραμμή εξόδου μπορεί να δεχτεί 10 πακέτα/sec. Ωστόσο, συχνά δημιουργείται ουρά (τα πακέτα αποθηκεύονται προσωρινά σε έναν buffer) λόγω του ακανόνιστου ρυθμού αφίξεων των πακέτων.

α) Βρείτε το μέσο χρόνο αναμονής του πακέτου στο buffer.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 2 πακέτα συνολικά στο κομβικό σημείο (και σε αναμονή και στις εξόδους);

ΛΥΣΗ

Έχουμε μοντέλο M/M/c με $c=3$, $\lambda=20$ πακέτα/sec, $\mu=10$ πακέτα/sec.

α) Ουσιαστικά ζητάμε το W_q . Προηγουμένως με βάση το τυπολόγιο πρέπει να υπολογίσουμε τα P_0 , L , L_q . Έχουμε $c=3$ και $\lambda/\mu=2$, οπότε:

$$P_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{0!} * 2^0 + \frac{1}{1!} * 2^1 + \frac{1}{2!} * 2^2 \right) + \frac{1}{3!} * 2^3 \frac{30}{30-20}} = \frac{1}{(1+2+2)+4} =$$

$$\frac{1}{9}$$

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c}{(c-1)! * (c\mu - \lambda)^2} * P_0 = \frac{20 * 10 * 2^3}{2! * (30-20)^2} * \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Άρα,

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 89 * 20 = \frac{2}{45}$$

Συνεπώς, ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πακέτου στον buffer είναι 2/45 sec.

β) Το πολύ 2 σημαίνει 0,1 ή 2. Έχουμε $P_0=1/9$ και

από τον τύπο

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Έχουμε ότι:

$$P_1 = \frac{1}{1!} 2^1 \frac{1}{9} = \frac{2}{9} P_2 = \frac{1}{2!} 2^2 \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Άρα η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 2 πακέτα στον κόμβο είναι:

$$P_0 + P_1 + P_2 = \frac{5}{9}$$

δηλαδή 55,55/100 [6] [5]

References

- [1] Queueing theory.
- [2] Queueing theory: Definition, history real-life applications.
- [3] ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, 2003.
- [4] A.Manou. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ, 2014.
- [5] D.Fakinoy. ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, 2008.
- [6] G.Kostas. Θεωρία Ουρών, Μελέτη και Σύγκριση μοντέλων μιας Υπηρεσίας, February,2012.
- [7] G.Tzavelas. ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, 2019.
- [8] Χ.ΑΣVESTOPOYLOY. ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑΑΝΑΠΤΥΞΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, 2016.
- [9] Γιάννης Γαροφαλάκης. Μοντέλα Θεωρίας Αναμονής, 2018.