

Άσκηση στους Μιγαδικούς

April 30, 2025

Εκφώνηση

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε

$$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|.$$

Να δείξετε ότι

$$z_1^3 + z_2^3 = 0.$$

Λύση

Ας δούμε μια λύση που είναι γεωμετρική. Από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από την αρχή των αξόνων O και τα πέρατα $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς είναι ισόπλευρο. Άρα η γωνία εταξύ των διανυσμάτων $OM_1(z_1)$, $OM_2(z_2)$ είναι $\frac{\pi}{3}$.

Έστω

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Από τη γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών συμπεραίνουμε ότι έχουμε $z_2 = wz_1$ (ή $z_1 = w^{-1}z_2$).

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) z_2^3 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_1^3 \end{aligned}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, ε παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$z_1^3 + z_2^3 = 0$$

1 Σχήμα

