Συνεισφορά τον Μαθηματικών σε άλλες επιστήμες

Κλαίρη Οπλασένη

1 Ενότητα 1

Εφαρμογές της ανάλυσης Φουριέ (Fourier)

Λίγο πριν το 1800, ο Γάλλος μαθηματικός/φυσικός/μηχανικός Jean Baptiste Joseph Fourier έκανε μια εκπληκτική ανακάλυψη. Μέσω των ενδελεχών αναλυτικών ερευνών του στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις που μοντελοποιούν την διάδοση της θερμότητας σε σώματα, ο Fourier οδηγήθηκε στον ισχυρισμό ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί ώς ένα άπειρο άθροισμα από στοιχειώδεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ημιτόνων και συνημιτόνων. Η ανακάλυψη αυτή του Fourier συγκαταλέγεται πολύ εύκολα στις δέκα σημαντικότερες μαθηματικές εξελίξεις όλων των εποχών, συμπεριλαμβανομένων της ανάλυσης του Newton, και της διαφορικής γεωμετρίας των Gauss και Riemann. Η ανάλυση Fourier αποτελεί πλέον μια ουσιώδη συνιστώσα πολλών σύγχρονων κλάδων τόσο των εφαρμοσμένων όσο και των θεωρητικών μαθηματικών. Αποτελεί ένα ισχυρότατο αναλυτικό εργαλείο για να επιλύσουμε ένα ευρύ φάσμα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στην φυσική, μηχανική, βιολογία και τα οικονομικά. Έχει επίσης πολλές επιστημονικές εφαρμογές όπως στη φυσική, στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, στη θεωρία αριθμών, στη συνδυαστική ανάλυση, στην επεξεργασία σήματος, στην επεξεργασία εικόνας, στη στατιστική, στην κρυπτογραφία, στην αριθμητική ανάλυση, στην ακουστική, στην ωκεανογραφία, στην οπτική και σε πολλούς άλλους τομείς.

2 Ενότητα 2

Ο όρος Μετασχηματισμός Φουριέ (ΜΦ) αναφέρεται σε μία αυστηρώς ορισμένη μαθηματική διεργασία η οποία αποσυνθέτει μία συνάρτηση σε άθροισμα απείρων περιοδικών ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων.Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού είναι μία νέα συνάρτηση με διαφορετικό πεδίο ορισμού,επίσης γνωστή ως Μετασχηματισμός Φουριέ ή ως φάσμα, η οποία περιγράφει το κατά πόσο συμμετέχει κάθε στοιχειώδες ημίτονο στον σχηματισμό της αρχικής συνάρτησης (έστω f). Ο ΜΦ αποτελεί οριακή περίπτωση (για συνάρτηση f με άπειρη περίοδο, δηλαδή ουσιαστικά απεριοδική) της σειράς Φουριέ.

3 Ενότητα 3

Μια συνάρτηση f(t) με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει τ που να ανήκει στο R, με τ διάφορο του μηδενός,έτσι ώστε να ισχύει :

$$f(t+\tau)=f(t) \tag{1}$$

Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να εκφραστεί ως άπειρο άθροισμα (σειρά) ημιτόνων και συνημιτόνων. Η συνάρτηση με περίοδο T μετασχηματίζεται σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων με περιόδους ακέραια πολλαπλάσια της T. Για ω = 2 π / T η σειρά γράφεται ως :

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n*cos(n\omega t)+b_n*sin(n\omega t)) \tag{2}$$

με συντελεστές :

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T(f(t))dt$$
$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T(f(t)sin(nwt))dt$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T(f(t)cos(nwt))dt$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης [0,T] μπορει να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε της μορφής [c,T+c].Συχνά χρησιμοποιείται επίσης το [-T/2,T/2]. η πρώτη δουλειά που έχουμε να κάνουμε είναι να δούμε αν μπορούμε να βρούμε τους ανωτέρω συντελεστές και μετά οτιδήποτε άλλο όπως θέματα σύγλισης κτλ. Οι σχέσεις ορθογωνιότητας χρησιμεύουν στο να καθοριστούν αυτοί, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στα δύο μέλη της εξίσωσης.

$$<f,cos(lt)>=\frac{a_0}{2}<1,cos(lt)>+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n*<cos(nt),cos(lt)> \tag{3}$$

,

δηλαδή $a_n=<f,cos(nx)>$ με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε ότι: $b_n=<f,sin(nx)>$

Με τη χρήση του τύπου του Euler :

$$e^{in\omega t}=cos(n\omega t)+isin(n\omega t) \tag{4}$$

,με ω=2π/T η σειρά Φουριέ μπορεί να γραφεί με μιγαδικούς όρους ως:

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n*e^{\frac{2\pi*int}{T}} \tag{5}$$

Ο Μετασχηματισμός Φουριέ αποτελεί γενίκευση της σειράς Φουριέ με μιγαδικούς όρους. Αντί των διακριτών όρων c_n χρησιμοποιεί την συνεχή συνάρτηση $F(t)$:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{2\pi*ixt}dx \tag{6}$$

4 Ενότητα 4

Εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος Όταν επεξεργαζόμαστε σήματα, όπως ήχο, ραδιοκύματα, κύματα φωτός, σεισμικά κύματα, ακόμα και εικόνες, η ανάλυση Φουριέ μπορεί να απομονώσει μεμονωμένους συντελεστές από μια σύνθετη κυματομορφή, συγκεντρώνοντάς τους για ευκολότερη ανίχνευση και/ή αφαίρεση. Μία μεγάλη οικογένεια τεχνικών επεξεργασίας σήματος αποτελείται από μετασχηματισμό Φουριέ ενός σήματος, χειρισμό μετασχηματισμένων με Φουριέ δεδομένων με απλό τρόπο και αντιστροφή του μετασχηματισμού.Μερικά παραδείγματα είναι τα παρακάτω:

- Τηλεφωνική κλήση: το τονικό σήμα για κάθε πλήκτρο τηλεφώνου, όταν πιέζεται, είναι το καθένα ένα σύνολο από δύο ξεχωριστούς τόνους (συχνότητες). Η ανάλυση Φουριέ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαχωριστεί (ή αναλυθεί) το σήμα του τηλεφώνου, για να αποκαλύψει τους δύο τόνους από τους οποίους αποτελείται και συνεπώς ποιο κουμπί πατήθηκε.
- Περίφραξη θορύβου από ηχογραφήσεις για να αφαιρεθεί ο «ήσυχος» θόρυβος του παρασκηνίου με την εξάλειψη των συντελεστών Φουριέ που δεν υπερβαίνουν ένα καθορισμένο εύρος.
- Δημιουργία του ηχητικού φασματογραφήματος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση ήχων.
- Ψηφιακή ραδιοφωνική λήψη χωρίς υπερετερώδυνο κύκλωμα, όπως σε ένα σύγχρονο κινητό τηλέφωνο.

References

[1] Book Section, Sobota,Tomasz, Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Netherlands, 2014.

[2] Journal Article, Fourier Heat Conduction Equation Journal of Aplied Mathematics and Mechanics volume 5.

[3] Encyclopedia Article Ανάλυση Φουριέ Wikipedia.

[4] Book Section Ferrari,Fausto Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Netherlands, 2014.

[5] Evans L. Partial Differential Equations American Mathematical Society 1998.